

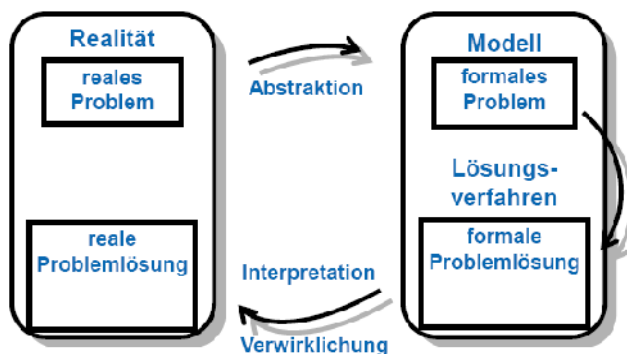
# 1. Einführung

---

Simulation ist das Nachbilden eines dynamischen Prozesses in einem System mit Hilfe eines experimentierfähigen Modells, um zu Erkenntnissen zu gelangen, die auf die Wirklichkeit übertragbar sind. [VDI-Richtlinie 3633]

## Computer-Simulation

- Entwurf eines mathematisch-logischen Modells für ein reales System
- Computergestütztes Durchführen von Experimenten mit diesem System
- Auswerten der Ergebnisse
- Anwendung in der Realität



## Warum Simulation

- Grundlage Modell: Experiment zerstört Realsystem, ist zu teuer oder unmöglich
- Untersuchung noch nicht vorhandener Systeme

## Modell

„Ein Modell ist die vereinfachte Darstellung der Funktion eines Gegenstandes oder des Ablaufs eines Sachverhalts, die eine Untersuchung oder Erforschung erleichtert oder erst möglich macht.“

## Simulationsmodelle

Komplexe Optimierungsmodelle, für die keine analytische Lösungsverfahren existieren; beschreiben in Form von mathematischen Funktionen das Verhalten eines Systems im Zeitablauf; Ergebnisse stehen stellvertretend für Verhältnisse in der Realität (Isomorphie)

## Systemkonzept

System: # von Objekten; wohldefinierte Menge von Interaktionen zwischen ihnen, die auf ein logisches Ende hinwirken

Systemumgebung: alle externen Faktoren, die eine Änderung im System verursachen

Systemzustand: min. Informationsmenge, bei der das zukünftige Verhalten des Systems bei Abwesenheit von Zufallsereignissen eindeutig vorhergesagt werden kann

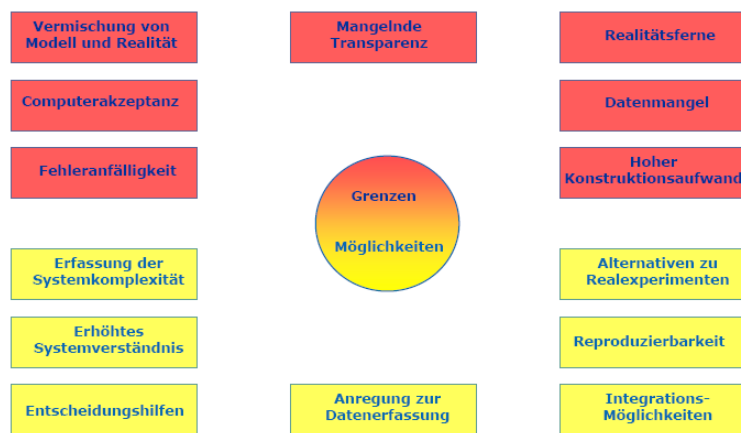
Zustandsänderung wird durch Aktivität ausgelöst (innerhalb/außerhalb des Systems: endogen/exogen)

## Vorteile der Simulation

- Eingangswerte beliebig veränderbar, ohne dabei Realität verändern zu müssen
- Zeitkompression
- Sensitivitätsanalyse durch Manipulation der Eingangsgrößen
- Graphische Darstellung und Animation -> Benutzerakzeptanz steigt

## Probleme der Simulation

- Isomorphieforderung schwer einzuhalten -> Validierung notwendig
- Hoher Zeitaufwand zur Modelentwicklung, hohe Kosten
- Datensammlung, Interpretation und Analyse häufig schwierig



## Analytisches vs. Simulation Vorgehen

Analytisches Modell:  $f$  wird als geschlossener mathematischer Ausdruck dargestellt

- Lösung per Differenzialrechnung
- Nicht immer in Praxis anwendbar

**Formel -> Einsetzen -> (optimales) Ergebnis**

Simulationsmodell:  $f$  besteht aus einer Reihe von Verarbeitungsschritten; nach jedem Schritt liegt ein Ergebnis vor

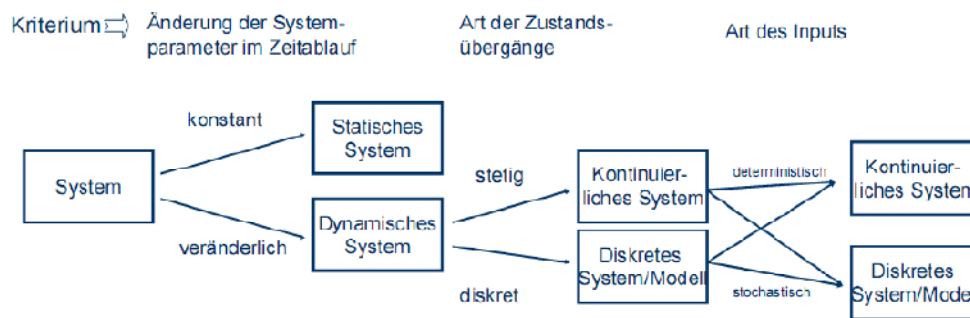
- Modell wird den Abläufen der Realität nachgebildet
- Keine Optimalitätsgarantie, aber immerhin Ergebnisse
- Simulation ist intuitiv verständlich
- Optimum: unter den gegebenen Bedingungen konnten kein besserer Wert gefunden werden
- Optimierung durch iterative Modellmodifikation
- Einsatz neben Ermittlung des Optimums auch zur Untersuchung des Systemverhaltens

**Modellieren -> Probieren -> Analysieren**

Zielkonflikt bei der Modellierung: so abstrakt wie möglich, so detailliert wie nötig

## Simulationsmodellunterscheidung nach ihren Eigenschaften

Statisch:	System zu einem bestimmten Zeitpunkt
Dynamisch:	System im Zeitablauf (zeit- oder ereignisorientiert)
Deterministisch:	neuer Zustand des Systems ergibt sich eindeutig aus dem vorherigen und der verbindenden Aktivität
Stochastisch:	einzugebende Werte sind statischer Art -> Ergebniswerte mit Hilfe der Wahrscheinlichkeit berechenbar
Stetig:	die simulierten Größen können sich im Zeitablauf kontinuierlich verändern
Diskret:	die simulierten Größen können im Zeitablauf nur bestimmte diskrete Werte annehmen



## 2. Monte-Carlo Simulation

Berücksichtigung von Unsicherheiten -> bei vielen Durchläufen lassen sich glaubhafte Aussagen über die Konsequenzen (das Systemverhalten) treffen.

### (deterministisches) Hit-or-Miss Monte Carlo

- Bsp.: Berechnung von Flächeninhalten
- Bernoulli (Gesetz der großen Zahlen): mit wachsendem Stichprobenumfang konvergiert die relative Häufigkeit der Treffer gegen deren Wahrscheinlichkeit
- Statisch: Wahrscheinlichkeit für das Eintreten einer bestimmten Zahl ist unabhängig von dem Ausgang des vorangegangenen Ereignisses

### Monte Carlo vs. Diskrete Simulation

- Monte Carlo: Zufallsexperimente statischer Natur
- Diskrete Simulation: behandelt auch komplexe dynamische Systeme; Zufallsexperimente sind hierbei nur Teilaspekte

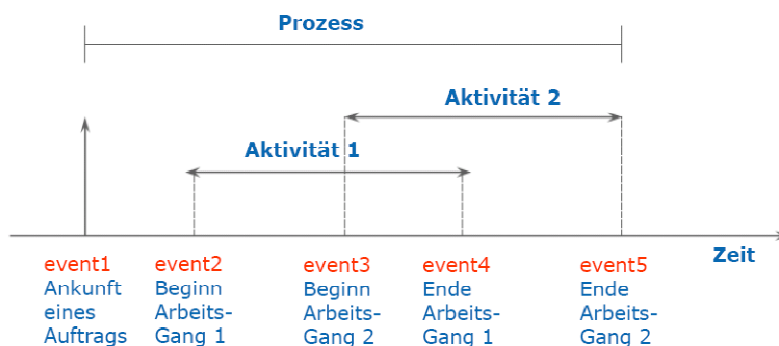
### Risikoanalyse

- Grenzbereich zwischen Monte Carlo und diskreter Simulation
- Stochastische Ergebnisgröße wird von stochastischen Eingabegrößen bestimmt

# 3. Diskrete, ereignisgesteuerte Simulation

## Konzept

- Entität
  - ✓ Besitzt Attribut
  - ✓ Permanent / Temporär im System
- Warteschlange
  - ✓ Abbildung von Auftragsstaus temporärer Entitäten vor Bedienstellen
  - ✓ Normalerweise permanenten Entitäten zugeordnet (z. B. Maschine)
  - ✓ Abarbeitung: FIFO, LIFO, Zufall
- Ereignisse (Zustandssprünge, Events)
  - ✓ Marksteine eines diskreten Systems
  - ✓ Systemzustand zwischen Ereignissen bleibt konstant
  - ✓ Kein Zeitverbrauch
  - ✓ Das Ereigniskonzept erfasst alle Zustandsänderungen im Systems
- Aktivität
  - ✓ Perioden, in denen ein bestimmter Vorgang zu einer konstanten Ausprägung eines Attributs führt (Ereignisse markieren Anfang und Ende einer Aktivität)
- Prozess
  - ✓ Alle Aktivitäten, die ein Systembestandteil durchläuft
- Ereignisliste
  - ✓ Liste, in der die Ausführungszeit aller Ereignistypen vorgehalten wird
- Simulationsuhr
  - ✓ Variable mit aktueller Simulationszeit
- Statistische Zähler
  - ✓ Speichervariable für statistische Informationen (Bsp.: mittlere Verweilzeit im System)
- Belegt / frei (busy / idle)
  - ✓ Jede Entität ist belegt (aktiv) oder frei (wartet, vor oder nach Aktivität)



## Zeitmanagement

### Konstante Zeitschritte

- Ereignisse im Intervall müssen gleichzeitig an dessen Ende berücksichtigt werden
- Schwierigkeit: Bestimmung der Länge der Zeitschritte
  - ✓ Problem: wenn Abstände der Ereignisse sehr groß / unterschiedlich

## Variable Zeitschritte

- Ereignisorientierte Ablaufsteuerung
- Modellzeit wird mit Zeitpunkten, an denen Ereignisse stattfinden fortgeschrieben
  - ✓ Modell wird aktualisiert und untersucht, wenn Statusänderung erfolgt
- Nachteil: schwierige Verwaltung der Systemzeit -> größerer Programmieraufwand

## Modellierungsarten (3 Formen diskreter Simulation)

- Ereignisorientierte Simulation
- Prozessorientierte Simulation
- Aktivitätsorientierte Simulation

## Ereignisorientierte Simulation

- Modell besteht aus einer Anzahl möglicher Ereignisse
- Vorgängerereignisse geben an, wann (stochastische) Nachfolgeereignisse ausgeführt werden sollen
- Systemereignis (kommt im realen System vor) und Programmereignis (im Computerprogramm)
- Für jedes Ereignis wird Ereignisroutine ausgeführt
  - ✓ Alle induzierten Zustandsänderungen in die Wege leiten und Zukünftige Ereignisse bestimmen
- Reihenfolge der Ereignisse wichtig: Auslösen, Blockieren, Stornieren -> Sequenzialisierung

### Listenmanagement

- ↳ Effiziente Verwaltung von Ereignislisten extrem wichtig
- ↳ Warteschlangen treten praktisch in allen Systemen mit beschränkten Ressourcen auf

## Prozessorientierte Modellierung

- Objekte haben generischen Lebenszyklus, durchwandern das System
- Idee: bilde alle Objektwege durch das System als Prozesse ab
- Events zur Zeitsteuerung mit zwei Listen (Current Event Set [CES], Future Event Set [FES])
  - ✓ Halte bei relevanten Änderungen nicht betroffene Prozesse an und (re-) aktiviere betroffene
  - ✓ CES: Alles, was schon passiert sein müsste, aber wo noch nicht erfüllte Eintrittsbedingungen vorliegen
  - ✓ FES: Ereignisse in der Zukunft

### Nachteile ereignisorientierter gegenüber prozessorientierten Simulation

- Komplexe Bedingungen zum Auslösen einzelner Ereignisse
- Bei jedem Ereignis sind viele Bedingungen zu überprüfen
- Prozessorientierung: System wird aus Sicht einer Entität betrachtet

# 4. Simulationsstudien

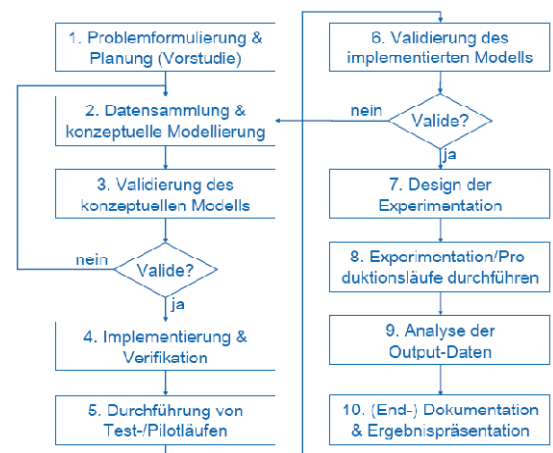
---

## Projektmanagement-Funktionen

- Zeitmanagement: Festlegung und Kontrolle des zeitlichen Rahmens eines Projektes
- Kostenmanagement: Planung, Steuerung und Überwachung des finanziellen Rahmens des Projektes
- Qualitätsmanagement: Tätigkeiten zur Festlegung von Qualitätsziele, -politik und Verantwortlichkeiten
- Risikomanagement: Alle erforderlichen Maßnahmen und Aufgaben zur Bekämpfung der Unwägbarkeit des technischen und/oder wirtschaftlichen Projekterfolges
- Wirtschaftlichkeitsbetrachtung: Ziel von OR-Studien fast immer Kostensenkung
- Informationsmanagement: Gestaltung des Projekt-Infosystems und deren Aufrechterhaltung über die Projektlaufzeit
- Projektbesprechungen: Gewinnung von Experten-, Anwenderwissen; Informationsaustausch und sofortige Reaktion möglich
- Dokumentationsmanagement: dient der Sicherung des Projekt- und Systemwissens; Archivierung

## Durchführung

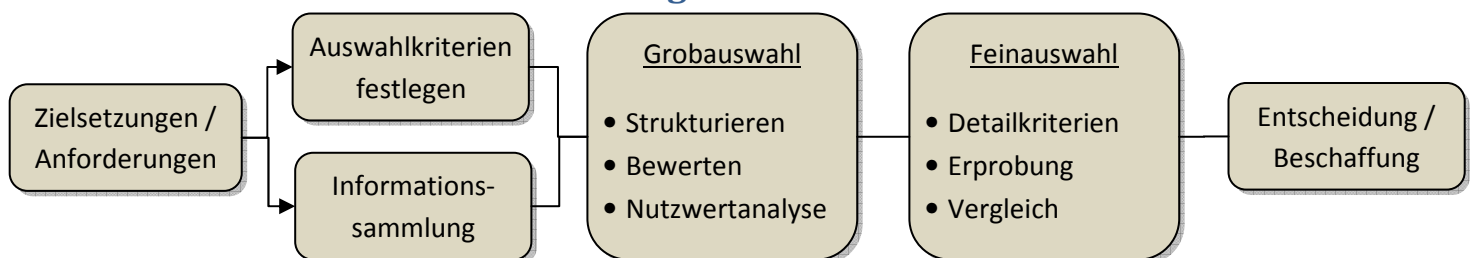
1. Problemformulierung und Planung (Vorstudie)
  - ↳ Problemdefinition durch Auftraggeber
  - ↳ Kickoff-Meeting mit Projektleiter, Simulationsexperten, Anwendungsexperten
2. Datensammlung & konzeptuelle Modellierung
  - ↳ Informationen über Systemstruktur und Prozesse sammeln (mehr als eine Person fragen)
  - ↳ Sammlung von repräsentativen Input-Daten
  - ↳ Gesammelte Informationen in einem Annahmen-Dokument festlegen -> konzeptuelles Modell
  - ↳ Wichtig: reguläre Besprechungen mit dem Auftraggeber
3. Validierung („Machen wir das richtige?“)
  - ↳ Konzeptuelles Modell prüfen: Structured Walk-through -> Basis: Annahmen-Dokument
4. Implementation, Verifikation („Machen wir das Richtige richtig?“) und Pilotläufe
  - ↳ Umsetzung des Modell in der gewählten Entwicklungsumgebung
  - ↳ Verifikation: Feststellung, dass das Simulationsprogramm (technisch) korrekt läuft
  - ↳ Testläufe: Simulationssystem mit echten Daten testen
5. Validierung des implementierten Modells
  - ↳ Wird die Realität korrekt abgebildet (Experten): Systemoutput mit Realsystem vergleichen
  - ↳ Sensitivitätsanalyse durch gezieltes verändern der Inputdaten
  - ↳ Es gibt keinen „richtigen Weg“, ein noch nicht existentes System zu validieren (Dokumentation)
6. (Design der) Simulationsläufe, Outputanalyse
  - ↳ Für jede zu untersuchende Systemkonfiguration wird spezifiziert: Länge des Simulationslaufes, Länge der Anlaufphase, Anzahl der unabhängigen Läufe
  - ↳ Produktionsläufe durchführen: sorgfältig protokollieren
  - ↳ Hauptziel: Leistungskennzahlen einzelner Systemkonfigurationen bestimmen / vergleichen
7. (End-) Dokumentation und Ergebnispräsentation



## Die 7 Todsünden der Simulation (nach Liebl)

1. Falsche Definition des Studienziels
  - ↳ Erkenntnisziele werden vom Beraterteam und Auftraggeber gemeinsam definiert
  - ↳ Schwierigkeiten: Auftraggeber im unklaren und Datenbedarf / „simulieren“ wird als „optimieren“ verstanden
  - ↳ Überzogene Erwartungen auf ein realistisches Maß zurechtrücken
2. Ungenügende Partizipation des Auftraggebers
  - ↳ Kunde und Berater müssen während der gesamten Studiendauer in enger Kooperation stehen
3. Falsche Mischung von Kernkompetenzen
4. Ungeeigneter Detaillierungsgrad
  - ↳ Große Modelle bereiten überproportional viel Kummer
  - ↳ Kunst: wesentliches vom unwesentlichen zu unterscheiden
5. Falsches Simulationswerkzeug (Programmiersprache)
6. Unzureichende Validierung
  - ↳ Fehlerart 1-ter (Resultate abgelehnt, obwohl glaubwürdig; model builder's risk), 2-ter (Resultate akzeptiert, obwohl nicht glaubwürdig; model user's risk) und 3-ter (irrelevante Problemlösung)
7. Schlechte Präsentation der Ergebnisse
  - ↳ Persönliche Präsentation und Ergebnisbericht -> beide enorm wichtig
  - ↳ adressatengerechte Präsentation
  - ↳ Kurzfassung / moderne Präsentationstechniken (aber Inhalt wichtiger)
  - ↳ Ergebnisse sind immer für den Auftraggeber nachvollziehbar aufzubereiten

## Auswahl von Simulationswerkzeugen



Simulationswerkzeuge: Programmiersprache, Simulationsprache, visuelle Systeme

# 5. Grundlagen der Statistik

## Wahrscheinlichkeit

- Zufallsexperiment (Elementarereignisse): mit steigender Zahl von Experimenten tendiert die relative Häufigkeit eines bestimmten Ergebnisses gegen die Wahrscheinlichkeit
- Wahrscheinlichkeitsmodell (stochastisch) eines Experiments: alle möglichen (Elementar-) Ereignisse mit ihren zugehörigen Wahrscheinlichkeiten
- Ergebnisraum  $\Omega$ : Menge aller möglichen (Elementar-) Ereignisse eines Zufallsexperiments
- Zufallsvariable  $X$ : eine Funktion mit dem Ergebnisraum als Definitionsbereich und einer Teilmenge der reellen Zahlen als Wertebereich  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
- Komplement eines Ereignisses  $E$ : Menge von Elementen, die in  $\Omega$  enthalten sind, aber nicht in  $E$
- Schnittmenge ( $E_1 \cap E_2$ ): Elementarereignisse, die beide Ereignisse gemeinsam haben  $\rightarrow E \cap \bar{E} = \emptyset$

- Vereinigung ( $E_1 + E_2$ ): Elementarereignisse die entweder in  $E_1$  oder in  $E_2$  oder in beiden vorkommen  $E + \bar{E} = \Omega$
- Bedingte Wahrscheinlichkeit  $P(E_1|E_2)$ : die Wahrscheinlichkeit, das  $E_1$  eingetroffen ist, wenn bekannt ist, dass  $E_2$  eingetroffen ist  $\rightarrow P(E_1|E_2) = P(E_1 \cap E_2)/P(E_2)$

### Verteilungsfunktion

- ✓  $0 \leq F_x(x) \leq 1$  und  $x_1 \leq x_2 \rightarrow F_x(x_1) \leq F_x(x_2)$  und  $\lim_{n \rightarrow -\infty} F_x(x) = 0 / \lim_{n \rightarrow \infty} F_x(x) = 1$

### Dichtefunktion (für stetige Zufallsgrößen)

- ✓  $P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_x(t) dt = F_x(x)$

### Parameter einer Funktion

- ✓ Lage-, Streuungsparameter, Varianz, Median, Schiefe, Wölbung

## Tests

### Testverfahren:

- Parameter-, Anpassungs- ( $\chi^2$ -Test, Kolmogorov-Smirnov-Test, Anderson-Darling-Test), Homogenitäts- und Unabhängigkeitstest
- Schritte:
  - ✓ Formulierung der Hypothese / Prüfgröße, Verwerfungsbereich festlegen / Testentscheidung
- $\chi^2$ -Test (Hypothesentest):
  - ✓ Typische Anwendung: Vergleich empirisch beobachteter Verteilung mit erwarteter / bekannter (parametrische) Verteilung
  - ✓ Wertmenge in Intervalle zerlegen (gleichmäßig 3-5 Stichprobenwerte je Intervall)
  - ✓  $\chi^2 = \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \sum A_i$
- Kolmogorov-Smirnov-Test: stärker als  $\chi^2$ -Test
  - ✓ Entdeckt eher kleine Unterschiede zwischen aktueller und theoretischer Verteilung
- Anderson-Darling-Test: die Power- oder Gütefunktion zeigt die Wahrscheinlichkeit, eine Beobachtung im kritischen Bereich zu bekommen, also die Nullhypothese abzulehnen

### Schätztheorie

Zum Teil liegen bestimmte Parameter aus der Grundgesamtheit nicht vor  $\rightarrow$  werden aber zum Testen gebraucht

- Eigenschaften: Unverzerrtheit, Effizienz, Suffizienz, Konsistenz

## Pseudo-Zufallszahlen

Wozu? - Mittels automatisch generierter Zufallszahlen lassen sich realitätsnahe Inputzahlen aus beliebigen Verteilungen generieren  $\rightarrow$  sehr wichtig für diskrete Simulation

Zufallszahlen werden gleichverteilt zwischen 0 und 1 generiert und in die gewünschte Verteilung transformiert



## Anforderungen an Zufallszahlen

- Gleichverteilt / statistisch unabhängig / reproduzierbar / keine Periodizität / schnelle Generierung
- Echte Zufallszahlen sind nicht reproduzierbar

## Pseudo-Zufallszahlen

- Deterministische Erzeugung:
  - ✓ unmittelbar aus Vorgänger erzeugt -> Algorithmus mit Startwert
  - ✓ frühe Methoden: Fibonacci, Mid-Square
  - ✓ Neue Methoden: Lineare / Multiplikative Kongruenzmethode
  - ✓ Methoden prinzipiell periodisch -> mit geeigneten Startwerten ist die Periode ausreichend lang

## Tests für Pseudo-Zufallszahlen

- ✓ Frequenztest, Serientest, Runs Test, Pokertest

# 6. Inputdaten-Generierung

---

## Nichttheoretische Verteilung

Wahrscheinlichkeiten, die nicht von einem vorher entwickelten mathematischen Ausdruck beschrieben werden, d. h. der empirisch beobachtete Verlauf hat einmalige Eigenschaften

- Diskret: ZV kann nur eine endliche Anzahl unterschiedlicher Werte annehmen und diese können direkt mit ihren jeweiligen relativen Wahrscheinlichkeiten angegeben werden
- Kontinuierlich: ZV kann eine unendliche Zahl möglicher Werte annehmen -> Zeit, Entfernung, Höhe  
Mit steigendem x nähert sich C(x) [kumulative Wahrscheinlichkeitsverteilung] asymptotisch der 1 an.

## Theoretische Verteilung

### Diskret:

- **Bernoulli-Verteilung:** geeignet zur Beschreibung von Situationen mit zwei sich gegenseitig ausschließenden Ereignissen (z. B. „Erfolg“, „Misserfolg“) unter Verwendung einer ZV x  
Formel: 
$$P(x) = \begin{cases} p & \text{für } x = 1 \\ 1 - p & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

p = Wahrscheinlichkeit für einen Erfolg (x=1)  
1-p = entsprechend Wahrscheinlichkeit für einen Misserfolg (x=0)
- **Binomial-Verteilung:** resultiert aus einer Reihe unabhängiger Bernoulli-Tests, z. B. beim Ziehen und Zurücklegen in der QS
- **Poisson-Verteilung:** beschreibt das Eintreffen voneinander unabhängiger gleichartiger Ereignisse in einem Zeitintervall, z. B. Anrufe von Kunden  
typischer Anwendungsbereich: Modellierung der Ankunft in Warteschlangensystemen
- **Hypergeometrische Verteilung:** besteht ebenfalls aus einer bestimmten Anzahl von Bernoulli-Test, misst die Anzahl von Versuchen bis zum ersten Erfolg oder Misserfolg

### Kontinuierlich:

- **Gleichverteilung:** beschreibt gleichwahrscheinliche Zufallszahlen in einem bestimmten Intervall generierte Zufallszahlen sollen gleichverteilt sein
- **(negative) Exponentialverteilung:** Betrifft Zeitintervalle zwischen unabhängigen Ereignissen, z. B. Dauer von Telefongesprächen; wird bei der Modellierung von Warteschlangen-Systemen verwendet
- **Normalverteilung:** Glockenkurve; oft nicht gut geeignet wegen Symmetrie; Grenzverteilung der Binomialverteilung;

## Anpassung

Wahl der „richtigen“ Verteilung-Familie:

- Schätzen der Parameter und testen, wie gut die Verteilung mit diesen Parametern den empirischen Daten entspricht.
- Law/Kelton:
  - ✓ Schritt 0: Benutze Histogramm und Kennzahlen um Charakteristika der Verteilung abzuleiten
  - ✓ Schritt 1: Ergebnisse aus Schritt 0 -> Verteilungsfamilie auswählen / Passe die Verteilung an die Daten an und nicht umgekehrt
  - ✓ Schritt 2: bestimme mit geeigneten Heuristiken, welche der angepassten Verteilungen die Stichprobe am besten repräsentiert
  - ✓ Schritt 3: Bestimme die Qualität der besten Verteilung -> Anpassungstests (z. B. KS-Test)

# 7. Warteschlangentheorie

---

## Wartesysteme

- Ein WS entsteht gdw Ankunft und/oder Abfertigung der Einheiten im System stochastisch verteilt sind
- Eigenschaften (5 Charakteristika):
  - ✓ Zugangscharakteristik ( $\lambda$ ): mittlere Ankunftsrate, d. h.  $\emptyset$  Anzahl der Zugänge je Zeiteinheit -> mittlere Zwischenankunftszeit:  $1/\lambda$
  - ✓ Abgangscharakteristik ( $\mu$ ): mittlere Bedien-/Abfertigungsrate -> mittlere Bedienzeit  $1/\mu$
  - ✓ Zahl der Anordnung der Kanäle: Ein- /Mehr-Kanal-System (parallel, in Reihe)
  - ✓ Schlangendisziplin: Möglichkeit zum warten (sonst: Verlustsysteme) / Zwang zum warten (oder Ungeduldssysteme) / Bedienreihenfolge: FIFO, LIFO, PRI, RR
  - ✓ Warteraumdisziplin: WSS mit unendlichem (offenem) oder begrenztem (geschlossenem) Warteraum

## (Kendall-) Notation

A/B/s/d/f/e:

A = Ankunftsprozess / B = Bedienprozess / s = # der (parallelen) Bedienstellen / d = max zulässige # in WS / f = Größe der Objektpopulation / e = Auswahlprinzip aus WS -> Bsp.: M/G/3/5/ $\infty$ /PRI

## M/M/1-System

- Ankunftsrate exponentialverteilt mit Parameter  $1/\lambda$
- Servicerate exponentialverteilt mit Parameter  $1/\mu$
- Wahrscheinlichkeit, dass j Objekte im System sind:  $P_j = (\lambda/\mu)^j P_0$
- Mittlere # der Objekte im System:  $L = \lambda/(\mu - \lambda)$
- Mittlere # der Objekte in WS:  $L_q = \lambda^2/\mu(\mu - \lambda)$
- Mittlere Gesamtzeit im System:  $W = 1/(\mu - \lambda)$
- Mittlere Gesamtzeit in WS:  $W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$

# 8. Experimentaldesign

---

Systemoptimierung mittels Simulation mit verschiedenen In- und Outputs

- Bisher: System und Alternativen explizit gegeben
- Jetzt: weniger Struktur; Welche Parameter haben überhaupt Einfluss auf die Problemlösung?
- Optimierung: Ultimatives (und schwierigstes) Ziel der Simulation -> Metaheuristische Verfahren