Aufgabe 1)

Zuschnittproblem mit Spaltengenerierung und Rundungsheuristik

Breite der Coils: $r = 90cm$

Kundenbedarfe:

3	Rollen der Breite	60,00cm
21	Rollen der Breite	30,00cm
94	Rollen der Breite	25,50cm
50	Rollen der Breite	20,00cm
288	Rollen der Breite	17,25cm
178	Rollen der Breite	15,00cm
112	Rollen der Breite	12,75cm
114	Rollen der Breite	10,00cm

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^{m} y_i a_i \\ u.d.N. \quad & \sum_{i=1}^{m} w_i a_i \le r \quad (i = 1,..,m) \\ & a_i \ge 0 \text{ und Integer} \end{aligned}$$

Wir berechnen zunächst die Anzahl der Streifen, die aus einem Coil erzeugt werden können:

$a_i = \lfloor r / w_i \rfloor, \ a = [1 \quad 3 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 9]^T$

Jetzt können wir eine gültige Lösung ermitteln:

$x_i^* = b_i / a_i \quad x_B^* = (3 \quad 7 \quad 31,\overline{3} \quad 12,5 \quad 57,6 \quad 29,\overline{6} \quad 16 \quad 16)^T$

Initialisierung der revidierten Simplexmethode / Bessere Startbasis (Chvátal S.207)

$$B = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&& \\ & 3 &&&&&& \\ && 3 &&&&& \\ &&& 4 &&&& \\ &&&& 5 &&& \\ &&&&& 6 && \\ &&&&&& 7 & \\ &&&&&&& 9 \end{pmatrix}, \quad x_B^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 31\frac{1}{3} \\ 12\frac{1}{2} \\ 57\frac{3}{5} \\ 29\frac{2}{3} \\ 16 \\ 16 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&& \\ 1 & 3 &&&&&& \\ && 3 &&&&& \\ &&& 4 &&&& \\ &&&& 5 &&& \\ &&&&& 6 && \\ && 1 &&&& 7 & \\ &&& 1 &&&& 9 \end{pmatrix}, \quad x_B^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 31\frac{1}{3} \\ 12\frac{1}{2} \\ 57\frac{3}{5} \\ 29\frac{2}{3} \\ 11\frac{11}{21} \\ 14\frac{11}{18} \end{pmatrix}$$

Finding a Good Initial Solution (Chvátal S.207)

$$a_i = \begin{cases} 0 & \text{if } i \notin R \\ \left\lfloor \left(r - \sum_{k=1}^{i-1} w_k a_k \right) \Big/ w_i \right\rfloor & \text{if } i \in R \end{cases}$$

Annahme:

Die Breiten sind absteigend sortiert! $w_1 > w_2 > ... > w_m$

In R sind nur Indizes, für die gilt $r \bmod w_i \not\equiv 0$, also $R = \{1,3,4,5,7\}$

Iteration 1:

$a_1 = \lfloor 90/60 \rfloor = 1, \ a_2 = \lfloor 30/30 \rfloor = 1, \ a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = 0$

Index 1 wird aus R gelöscht!

Iteration 2:
$a_3 = \lfloor 90/25{,}5 \rfloor = 3,\ a_4 = a_5 = a_6 = 0,\ a_7 = \lfloor 13{,}5/12{,}75 \rfloor = 1,\ a_8 = 0$
Index 3 wird aus R gelöscht!

Iteration 3:
$a_4 = \lfloor 90/20 \rfloor = 4,\ a_5 = a_6 = a_7 = 0,\ a_8 = \lfloor 10/10 \rfloor = 1$
Index 4 wird aus R gelöscht!

Iteration 4:
$a_5 = \lfloor 90/17{,}25 \rfloor = 5,\ a_6 = a_7 = a_8 = 0$
Index 5 wird aus R gelöscht!

Iteration 5:
$a_7 = \lfloor 90/12{,}75 \rfloor = 7,\ a_8 = 0$
Index 7 wird aus R gelöscht!

Iteration 1:

Step 1: Solving (with MuPAD) the system $yB = c_B \ mit \ c_B = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$,

we obtain $y = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{7} & \frac{2}{9} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{9}\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 &&&&&&& \\ 1 & 3 &&&&&& \\ && 3 &&&&& \\ &&& 4 &&&& \\ &&&& 5 &&& \\ &&&&& 6 && \\ && 1 &&&& 7 & \\ &&& 1 &&&& 9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Step 2: Looking for nonnegative integers $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7,\ a_8$

$60a_1 + 30a_2 + 25{,}5a_3 + 20a_4 + 17{,}25a_5 + 15a_6 + 12{,}75a_7 + 10a_8 \le 90$

$\frac{2}{3}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{2}{7}a_3 + \frac{2}{9}a_4 + \frac{1}{5}a_5 + \frac{1}{6}a_6 + \frac{1}{7}a_7 + \frac{1}{9}a_8 > 1$

Aufgabe 1	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	***TYP***	***RHS***
Max	2/3	1/3	2/7	2/9	1/5	1/6	1/7	1/9		
LB										
UB	**INF**	**INF**	**INF**	**INF**	**INF**	**INF**	**INF**	**INF**		
TYP	**INT**	**INT**	**INT**	**INT**	**INT**	**INT**	**INT**	**INT**		
Row1	60,00	30,00	25,50	20,00	17,25	15,00	12,75	10,00	<=	90
Activity	0	0	0	0	3	0	3	0		1,03

$a = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0\end{pmatrix}^T$ entspricht der eintretenden Spalte

Step 3: Solving (with MuPAD) the system $Bd = a$, we find $d = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 3/5 & 0 & 3/7 & 0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&& \\ 1 & 3 &&&&&& \\ && 3 &&&&& \\ &&& 4 &&&& \\ &&&& 5 &&& \\ &&&&& 6 && \\ && 1 &&&& 7 & \\ &&& 1 &&&& 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_4 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_7 \\ d_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Step 4: Comparing the ratios

$$r \in \arg\min_{i\in F}\left\{\frac{\left(x_B^*\right)_i}{d_i}\right\} = \left\{\frac{57\,{}^3\!/_5}{{}^3\!/_5}, \frac{11\,{}^{11}\!/_{21}}{{}^3\!/_7}\right\} = \left\{96, 26\,{}^8\!/_9\right\},\ p = B(7),\ t = \frac{\left(x_B^*\right)_r}{d_r} = 26\,{}^8\!/_9$$

$$with\ \ F = \left\{i \mid i \in \{1,..,m\}, d_i > 0\right\} = \{5,7\}$$

Step 5: Now we have $\left(x_B^* \leftarrow x_B^* - td,\ x_q^* = t\right)$

$$B = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&& \\ 1 & 3 &&&&&& \\ && 3 &&&&& \\ &&& 4 &&&& \\ &&&& 5 && 3 & \\ &&&&& 6 && \\ && 1 &&&& 3 & \\ &&& 1 &&&& 9 \end{pmatrix},\quad x_B^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 31\,{}^1\!/_3 \\ 12\,{}^1\!/_2 \\ 57\,{}^3\!/_5 - 26\,{}^8\!/_9 * {}^3\!/_5 \\ 29\,{}^2\!/_3 \\ t \\ 14\,{}^{11}\!/_{18} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 31\,{}^1\!/_3 \\ 12\,{}^1\!/_2 \\ 41\,{}^7\!/_{15} \\ 29\,{}^2\!/_3 \\ 26\,{}^8\!/_9 \\ 14\,{}^{11}\!/_{18} \end{pmatrix}$$

Iteration 2:

Step 1: Solving (with MuPAD) the system $yB = c_B\ mit\ c_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

we obtain $y = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{13}{45} & \frac{2}{9} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{2}{15} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$

Step 2: Looking for nonnegative integers $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7,\ a_8$

$$60a_1 + 30a_2 + 25{,}5a_3 + 20a_4 + 17{,}25a_5 + 15a_6 + 12{,}75a_7 + 10a_8 \le 90$$

$$\frac{2}{3}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{13}{45}a_3 + \frac{2}{9}a_4 + \frac{1}{5}a_5 + \frac{1}{6}a_6 + \frac{2}{15}a_7 + \frac{1}{9}a_8 > 1$$

Aufgabe 1	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	***TYP***	***RHS***
Max	2/3	1/3	13/45	2/9	1/5	1/6	2/15	1/9		
LB										
UB	**INF**	**INF**	**INF**	**INF**	**INF**	**INF**	**INF**	**INF**		
TYP	**INT**	**INT**	**INT**	**INT**	**INT**	**INT**	**INT**	**INT**		
Row1	60,00	30,00	25,50	20,00	17,25	15,00	12,75	10,00	<=	90

Activity	0	0	0	1	4	0	0	0	1,02

$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ entspricht der eintretenden Spalte

Step 3: Solving (with MuPAD) the system $Bd = a$, we find $d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/4 & 4/5 & 0 & 0 & -1/36 \end{pmatrix}$

Step 4: Comparing the ratios

$$r \in \arg\min_{i\in F}\left\{\frac{\left(x_B^*\right)_i}{d_i}\right\} = \left\{\frac{12\,{}^1\!/_2}{{}^1\!/_4}, \frac{41\,{}^7\!/_{15}}{{}^4\!/_5}\right\} = \left\{50, 51\,{}^5\!/_6\right\},\ p = B(4),\ t = \frac{\left(x_B^*\right)_r}{d_r} = 50$$

$$with\ \ F = \left\{ i \mid i \in \{1,..,m\}, d_i > 0 \right\} = \{4,5\}$$

Step 5: Now we have $\left(x_B^* \leftarrow x_B^* - td,\ x_q^* = t\right)$

$$B = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&& \\ 1 & 3 &&&&&& \\ && 3 &&&&& \\ &&& 1 &&&& \\ &&& 4 & 5 && 3 & \\ &&&&& 6 && \\ && 1 &&&& 3 & \\ &&&&&&& 9 \end{pmatrix},\quad x_B^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 31\,{}^1\!/_3 \\ t \\ 41\,{}^7\!/_{15} - 50 * {}^4\!/_5 \\ 29\,{}^2\!/_3 \\ 26\,{}^8\!/_9 \\ 14\,{}^{11}\!/_{18} - 50 * \left(-{}^1\!/_{36}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 31\,{}^1\!/_3 \\ 50 \\ 1\,{}^7\!/_{15} \\ 29\,{}^2\!/_3 \\ 26\,{}^8\!/_9 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Iteration 3:

Step 1: Solving (with MuPAD) the system $yB = c_B\ mit\ c_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

we obtain $y = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{13}{45} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{2}{15} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$

Step 2: Looking for nonnegative integers $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7,\ a_8$

$$60a_1 + 30a_2 + 25{,}5a_3 + 20a_4 + 17{,}25a_5 + 15a_6 + 12{,}75a_7 + 10a_8 \le 90$$

$$\frac{2}{3}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{13}{45}a_3 + \frac{1}{5}a_4 + \frac{1}{5}a_5 + \frac{1}{6}a_6 + \frac{2}{15}a_7 + \frac{1}{9}a_8 > 1$$

Aufgabe 1	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	***TYP***	***RHS***
Max	2/3	1/3	13/45	1/5	1/5	1/6	2/15	1/9		
LB										
UB	**INF**	**INF**	**INF**	**INF**	**INF**	**INF**	**INF**	**INF**		
TYP	**INT**	**INT**	**INT**	**INT**	**INT**	**INT**	**INT**	**INT**		
Row1	60,00	30,00	25,50	20,00	17,25	15,00	12,75	10,00	<=	90
Activity	0	0	0	0	4	0	0	2		1,02

$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^T$ entspricht der eintretenden Spalte

Step 3: Solving (with MuPAD) the system $Bd = a$, we find $d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 4/5 & 0 & 0 & 2/9 \end{pmatrix}$

Step 4: Comparing the ratios

$$r \in \arg\min_{i \in F} \left\{ \frac{\left(x_B^*\right)_i}{d_i} \right\} = \left\{ \frac{1\tfrac{7}{15}}{\tfrac{4}{5}}, \frac{16}{\tfrac{2}{9}} \right\} = \left\{ 1\tfrac{5}{6}, 72 \right\},\ p = B(5),\ t = \frac{\left(x_B^*\right)_r}{d_r} = 1\tfrac{5}{6}$$

$$with\ \ F = \left\{ i \mid i \in \{1,..,m\}, d_i > 0 \right\} = \{5,8\}$$

Step 5: Now we have $\left(x_B^* \leftarrow x_B^* - td,\ x_q^* = t\right)$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ 1 & 3 & & & & & & \\ & & 3 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & 4 & 4 & & 3 & \\ & & & & & 6 & & \\ & & 1 & & & & 3 & \\ & & & & 2 & & & 9 \end{pmatrix},\quad x_B^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 31\tfrac{1}{3} \\ 50 \\ t \\ 29\tfrac{2}{3} \\ 26\tfrac{8}{9} \\ 16 - 1\tfrac{5}{6} * \tfrac{2}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 31\tfrac{1}{3} \\ 50 \\ 1\tfrac{5}{6} \\ 29\tfrac{2}{3} \\ 26\tfrac{8}{9} \\ 15\tfrac{16}{27} \end{pmatrix}$$

Iteration 4:

Step 1: Solving (with MuPAD) the system $yB = c_B\ mit\ c_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

we obtain $y = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{31}{108} & \frac{2}{9} & \frac{7}{36} & \frac{1}{6} & \frac{5}{36} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$

Step 2: Looking for nonnegative integers $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7,\ a_8$

$$60a_1 + 30a_2 + 25{,}5a_3 + 20a_4 + 17{,}25a_5 + 15a_6 + 12{,}75a_7 + 10a_8 \le 90$$

$$\frac{2}{3}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{31}{108}a_3 + \frac{2}{9}a_4 + \frac{7}{36}a_5 + \frac{1}{6}a_6 + \frac{5}{36}a_7 + \frac{1}{9}a_8 > 1$$

Aufgabe 1	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	***TYP***	***RHS***
Max	2/3	1/3	31/108	2/9	7/36	1/6	5/36	1/9		
LB										
UB	**INF**	**INF**	**INF**	**INF**	**INF**	**INF**	**INF**	**INF**		
TYP	**INT**	**INT**	**INT**	**INT**	**INT**	**INT**	**INT**	**INT**		
Row1	60,00	30,00	25,50	20,00	17,25	15,00	12,75	10,00	<=	90
Activity	0	1	1	0	2	0	0	0		1,01

$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ entspricht der eintretenden Spalte

Step 3: Solving (with MuPAD) the system $Bd = a$, we find

$d = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 7/12 & 0 & -1/9 & -7/54 \end{pmatrix}$

Step 4: Comparing the ratios

$$r \in \arg\min_{i \in F}\left\{\frac{\left(x_B^*\right)_i}{d_i}\right\} = \left\{\frac{6}{1/3}, \frac{31\,1/3}{1/3}, \frac{1\,5/6}{7/12}\right\} = \left\{18, 94, 3\,1/7\right\},\ p = B(5),\ t = \frac{\left(x_B^*\right)_r}{d_r} = 3\,1/7$$

$$with\ \ F = \left\{i \mid i \in \{1,..,m\}, d_i > 0\right\} = \{2,3,5\}$$

Step 5: Now we have $\left(x_B^* \leftarrow x_B^* - td,\ x_q^* = t\right)$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ 1 & 3 & & & 1 & & & \\ & & 3 & & 1 & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & 4 & 2 & & 3 & \\ & & & & & 6 & & \\ & & 1 & & & & 3 & \\ & & & & & & & 9 \end{pmatrix},\quad x_B^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 - 3\,1/7 * 1/3 \\ 31\,1/3 - 3\,1/7 * 1/3 \\ 50 \\ t \\ 29\,2/3 \\ 26\,8/9 - 3\,1/7 * \left(-1/9\right) \\ 15\,16/27 - 3\,1/7 * \left(-7/54\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4\,20/21 \\ 30\,2/7 \\ 50 \\ 3\,1/7 \\ 29\,2/3 \\ 27\,5/21 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Iteration 5:

Step 1: Solving (with MuPAD) the system $yB = c_B\ mit\ c_B = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$,

we obtain $y = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{7} & \frac{5}{21} & \frac{4}{21} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{9}\end{pmatrix}$

Step 2: Looking for nonnegative integers $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7,\ a_8$

$$60a_1 + 30a_2 + 25{,}5a_3 + 20a_4 + 17{,}25a_5 + 15a_6 + 12{,}75a_7 + 10a_8 \le 90$$

$$\frac{2}{3}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{2}{7}a_3 + \frac{5}{21}a_4 + \frac{4}{21}a_5 + \frac{1}{6}a_6 + \frac{1}{7}a_7 + \frac{1}{9}a_8 > 1$$

Aufgabe 1	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	TYP	RHS
Max	2/3	1/3	2/7	5/21	4/21	1/6	1/7	1/9		
LB										
UB	INF	INF	INF	INF	INF	INF	INF	INF		
TYP	INT	INT	INT	INT	INT	INT	INT	INT		
Row1	60,00	30,00	25,50	20,00	17,25	15,00	12,75	10,00	<=	90
Activity	0	0	0	4	0	0	0	1		1,06

$a = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^T$ entspricht der eintretenden Spalte

Step 3: Solving (with MuPAD) the system $Bd = a$, we find

$d = \begin{pmatrix}0 & 16/7 & 16/7 & 4 & -48/7 & 0 & -16/21 & 1/9\end{pmatrix}$

Step 4: Comparing the ratios

$$r \in \arg\min_{i \in F}\left\{\frac{\left(x_B^*\right)_i}{d_i}\right\} = \left\{\frac{4\,{}^{20}\!/_{21}}{{}^{16}\!/_{7}}, \frac{30\,{}^{2}\!/_{7}}{{}^{16}\!/_{7}}, \frac{50}{4}, \frac{16}{{}^{1}\!/_{9}}\right\} = \left\{2\,{}^{1}\!/_{6}, 13\,{}^{1}\!/_{4}, 12\,{}^{1}\!/_{2}, 144\right\},\ p = B(2),\ t = \frac{\left(x_B^*\right)_r}{d_r} = 2\,{}^{1}\!/_{6}$$

$$\text{with}\ \ F = \left\{ i \mid i \in \{1,..,m\}, d_i > 0\right\} = \{2,3,4,8\}$$

Step 5: Now we have $\left(x_B^* \leftarrow x_B^* - td,\ x_q^* = t\right)$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ 1 & & & & 1 & & & \\ & & 3 & & 1 & & & \\ & 4 & & 1 & & & & \\ & & & 4 & 2 & & 3 & \\ & & & & & 6 & & \\ & & 1 & & & & 3 & \\ & 1 & & & & & & 9 \end{pmatrix},\quad x_B^* = \begin{pmatrix} 3 \\ t \\ 30\,{}^{2}\!/_{7} - 2\,{}^{1}\!/_{6} * {}^{16}\!/_{7} \\ 50 - 2\,{}^{1}\!/_{6} * 4 \\ 3\,{}^{1}\!/_{7} - 2\,{}^{1}\!/_{6} * \left(-{}^{48}\!/_{7}\right) \\ 29\,{}^{2}\!/_{3} \\ 27\,{}^{5}\!/_{21} - 2\,{}^{1}\!/_{6} * \left(-{}^{16}\!/_{21}\right) \\ 16 - 2\,{}^{1}\!/_{6} * {}^{1}\!/_{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2\,{}^{1}\!/_{6} \\ 25\,{}^{1}\!/_{3} \\ 41\,{}^{1}\!/_{3} \\ 18 \\ 29\,{}^{2}\!/_{3} \\ 28\,{}^{8}\!/_{9} \\ 15\,{}^{41}\!/_{54} \end{pmatrix}$$

Iteration 6:

Step 1: Solving (with MuPAD) the system $yB = c_B\ mit\ c_B = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$,

we obtain $y = \begin{pmatrix} \frac{73}{108} & \frac{35}{108} & \frac{31}{108} & \frac{2}{9} & \frac{7}{36} & \frac{1}{6} & \frac{5}{36} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$

Step 2: Looking for nonnegative integers $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7,\ a_8$

$$60a_1 + 30a_2 + 25{,}5a_3 + 20a_4 + 17{,}25a_5 + 15a_6 + 12{,}75a_7 + 10a_8 \le 90$$

$$\frac{73}{108}a_1 + \frac{35}{108}a_2 + \frac{31}{108}a_3 + \frac{2}{9}a_4 + \frac{7}{36}a_5 + \frac{1}{6}a_6 + \frac{5}{36}a_7 + \frac{1}{9}a_8 > 1$$

Aufgabe 1	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	***TYP***	***RHS***
Max	73/108	35/108	31/108	2/9	7/36	1/6	5/36	1/9		
LB										
UB	**INF**	**INF**	**INF**	**INF**	**INF**	**INF**	**INF**	**INF**		
TYP	**INT**	**INT**	**INT**	**INT**	**INT**	**INT**	**INT**	**INT**		
Row1	60,00	30,00	25,50	20,00	17,25	15,00	12,75	10,00	<=	90
Activity	0	0	1	0	2	2	0	0		1,01

$a = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0\end{pmatrix}^T$ entspricht der eintretenden Spalte

Step 3: Solving (with MuPAD) the system $Bd = a$, we find

$d = \begin{pmatrix}0 & -7/48 & 1/3 & 7/12 & 0 & 1/3 & -1/9 & 7/432\end{pmatrix}$

Step 4: Comparing the ratios

$$r \in \arg\min_{i \in F}\left\{\frac{\left(x_B^*\right)_i}{d_i}\right\} = \left\{\frac{25\,^1\!/_3}{^1\!/_3}, \frac{41\,^1\!/_3}{^7\!/_{12}}, \frac{29\,^2\!/_3}{^1\!/_3}, \frac{15\,^{41}\!/_{54}}{^7\!/_{432}}\right\} = \left\{76, 70\,^6\!/_7, 89, 972\,^4\!/_7\right\},$$

$$p = B(4),\ t = \frac{\left(x_B^*\right)_r}{d_r} = 70\,^6\!/_7 \ \ with\ \ F = \left\{i \mid i \in \{1,..,m\}, d_i > 0\right\} = \{2\}$$

Step 5: Now we have $\left(x_B^* \leftarrow x_B^* - td,\ x_q^* = t\right)$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ 1 & & & & 1 & & & \\ & & 3 & 1 & 1 & & & \\ & 4 & & & & & & \\ & & & 2 & 2 & & 3 & \\ & & & 2 & & 6 & & \\ & & 1 & & & & 3 & \\ & 1 & & & & & & 9 \end{pmatrix},\quad x_B^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 2\,^1\!/_6 - 70\,^6\!/_7 * \left(-^7\!/_{48}\right) \\ 25\,^1\!/_3 - 70\,^6\!/_7 * {^1\!/_3} \\ t \\ 18 \\ 29\,^2\!/_3 - 70\,^6\!/_7 * {^1\!/_3} \\ 28\,^8\!/_9 - 70\,^6\!/_7 * \left(-^1\!/_9\right) \\ 15\,^{41}\!/_{54} - 70\,^6\!/_7 * {^7\!/_{432}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12\,^1\!/_2 \\ 1\,^5\!/_7 \\ 70\,^6\!/_7 \\ 18 \\ 6\,^1\!/_{21} \\ 36\,^{16}\!/_{21} \\ 14\,^{11}\!/_{18} \end{pmatrix}$$

Iteration 7:

Step 1: Solving (with MuPAD) the system $yB = c_B\ mit\ c_B = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$,

we obtain $y = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{7} & \frac{2}{9} & \frac{4}{21} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{9}\end{pmatrix}$

Step 2: Looking for nonnegative integers $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7,\ a_8$

$$60a_1 + 30a_2 + 25{,}5a_3 + 20a_4 + 17{,}25a_5 + 15a_6 + 12{,}75a_7 + 10a_8 \le 90$$

$$\frac{2}{3}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{2}{7}a_3 + \frac{2}{9}a_4 + \frac{4}{21}a_5 + \frac{1}{6}a_6 + \frac{1}{7}a_7 + \frac{1}{9}a_8 > 1$$

Aufgabe 1	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	***TYP***	***RHS***
Max	2/3	1/3	2/7	2/9	4/21	1/6	1/7	1/9		
LB										
UB	**INF**	**INF**	**INF**	**INF**	**INF**	**INF**	**INF**	**INF**		
TYP	**INT**	**INT**	**INT**	**INT**	**INT**	**INT**	**INT**	**INT**		
Row1	60,00	30,00	25,50	20,00	17,25	15,00	12,75	10,00	<=	90
Activity	0	0	0	0	0	0	7	0		1,00

$a = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0\end{pmatrix}^T$ entspricht der eintretenden Spalte

Hier sieht man endlich, dass der Zielfunktionswert dem Wert 1 entspricht, daraus schließen wir, dass die Basis optimal ist. Das LP-Optimum hierzu entspricht 163,49206…

Rundet man x^* ab, so erhält man eine Verteilung auf 160 Rollen. Beim Aufrunden erhält man dagegen eine Verteilung der Schnittmuster auf 166 Rollen. Das IP-Optimum muss irgendwo dazwischen liegen.

Fehlende Schnittmuster berechnen:

$x_i := Gesamtbedarf - \sum_{i=1}^{8} \lfloor x_i^* \rfloor * b_{ij}$ *wobei b aus B* $\left(j \text{ Spaltenindex}, \ i \text{ Zeilenindex} \right)$

$x_1 = 3 - 3 = 0,\ x_2 = 21 - 21 = 0,\ x_3 = 94 - 91 = 3,\ x_4 = 50 - 48 = 2,$

$x_5 = 288 - 284 = 4,\ x_6 = 178 - 176 = 2,\ x_7 = 112 - 109 = 3,\ x_8 = 144 - 138 = 6$

Es fehlen also:
3x 25,5cm / 2x 20cm / 4x 17,25cm / 2x15cm / 3x12,75cm / 6x 10cm

Eine mögliche Aufteilung wäre z. B.

w_i, wo $x_i > 0$	Coil 1	Coil 2	Coil 3	Coil 4
25,5	3			
20		2		
17,25			4	
15		2		
12,75				3
10	1		2	3
$\sum$	86,5	70	89	68,25

Damit ergibt sich sub summarum eine Menge von 164 Coils, die mindestens benötigt werden. Weniger geht nicht, weil die LP-Lösung bereits mehr als 163 benötigt.

Aufgabe 2)

a)

(Die Formel für die jeweiligen oberen und unteren Zeilensummen befinden sich im Skript 9 auf Folie 12 und Folie 21)

Primales Model

$$\begin{aligned} \min -2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 \\ s.t. \quad x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &\le 4 \\ -x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &\le 1 \\ x_1 \qquad\quad + x_4 &\le 3 \\ x_i &\ge 0 \end{aligned}$$

Duales Modell

$$\begin{aligned} \max 4y_1 + y_2 + 3y_3 \\ s.t. \quad y_1 - y_2 + y_3 &\ge -2 \\ y_1 - y_2 \qquad &\ge -3 \\ y_1 + y_2 \qquad &\ge 1 \\ -2y_1 - 2y_2 + y_3 &\ge 1 \\ y_i &\ge 0 \end{aligned}$$

Obere und untere Zeilensummen des dualen Modells
/Test auf dominierende Variablen

$$\begin{array}{lll} c_1 = -2 & \underline{c}_1 = -\infty & \overline{c}_1 = -\infty \\ c_2 = -3 & \underline{c}_2 = -\infty & \overline{c}_2 = -\infty \\ c_3 = 1 & \underline{c}_3 = -\infty & \overline{c}_3 = 0 \quad \rightarrow \quad c_3 > \overline{c_3} \\ c_4 = 1 & \underline{c}_4 = -\infty & \overline{c}_4 = -\infty \end{array}$$

Somit kann x_3 auf untere Schranke fixiert werden und aus dem Problem entfernt werden.

Primales Modell

$$
\begin{aligned}
&\min -2x_1 - 3x_2 + x_4 \\
&s.t. \quad x_1 + x_2 - 2x_4 \le 4 \\
&\qquad -x_1 - x_2 - x_4 \le 1 \\
&\qquad x_1 \qquad + x_4 \le 3 \\
&\qquad\qquad x_{1,2,4} \ge 0, x_3 = 0
\end{aligned}
$$

Obere und untere Zeilensumme des primalen Modells
/Test auf redundante und fixierende Nebenbedingungen

$b_1 = 4 \qquad \underline{b}_1 = -\infty \qquad \overline{b}_1 = \infty$

$b_2 = 1 \qquad \underline{b}_2 = -\infty \qquad \overline{b}_2 = 0 \qquad \to \quad b_2 > \overline{b}_0$

$b_3 = 3 \qquad \underline{b}_3 = 0 \qquad \overline{b}_3 = \infty$

Restriktion 2 kann somit entfernt werden

Primales Modell

$$
\begin{aligned}
&\min -2x_1 - 3x_2 + x_4 \\
&s.t. \quad x_1 + x_2 - 2x_4 \le 4 \\
&\qquad x_1 \qquad + x_4 \le 3 \\
&\qquad\qquad x_{1,2,4} \ge 0, x_3 = 0
\end{aligned}
$$

Duales Modell

$$
\begin{aligned}
&\max 4y_1 + 3y_3 \\
&s.t. \quad y_1 + y_3 \ge -2 \\
&\qquad y_1 \qquad \ge -3 \\
&\quad -2y_1 + y_3 \ge 1 \\
&\qquad\qquad y_i \ge 0
\end{aligned}
$$

Bei x_2 handelt es sich um eine singleton column damit wird 3 neue untere Schranke von y_3

Obere und untere Zeilensumme des dualen Problems
/Test auf dominierende Variablen

$c_1 = -2 \qquad \underline{c}_1 = -\infty \qquad \overline{c}_1 = -3 \qquad \to \quad \overline{c}_1 < c_1$

$c_2 = -3 \qquad \underline{c}_2 = -\infty \qquad \overline{c}_2 = -\infty$

$c_3 = 1 \qquad \underline{c}_3 = -\infty \qquad \overline{c}_3 = -\infty$

x_1 auf untere Schranke fixieren

Primales Problem

$$
\begin{aligned}
&\min -3x_2 + x_4 \\
&s.t.\ x_2 - 2x_4 \le 4 \\
&\qquad x_4 \le 3 \\
&\quad x_2, x_4 \ge 0,\ x_1, x_3 = 0
\end{aligned}
$$

Bei $x_4 \le 3$ handelt es sich um eine singleton row damit wird 3 neue obere Schranke von x_4

Primales Problem Duales Problem

$$\begin{aligned} &\min -3x_2 + x_4 \\ &s.t.\ x_2 - 2x_4 \le 4 \\ &\qquad x_1, x_3 = 0, x_2 \ge 0, 0 \le x_4 \le 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\max\ 4y_1 \\ &s.t.\quad y_1 \ge -3 \\ &\quad -2y_1 \ge 1 \end{aligned}$$

Obere und untere Zeilensumme des dualen Problems
/Test auf dominierende Variablen

$c_1 = -3$ $\quad \underline{c}_1 = -\infty$ $\quad \bar{c}_1 = -\infty$

$c_2 = 1$ $\quad \underline{c}_2 = 6$ $\quad \bar{c}_2 = 0 \quad \rightarrow \quad c_2 < \underline{c}_2$

Die duale Nebenbedingung kann nicht eingehalten werden und x_4 kann auf seine obere Schranke fixiert werden.

Primales Problem

$$\begin{aligned} &\min -3x_2 + 3 \\ &s.t.\ x_2 \le 10 \\ &\qquad x_1, x_3 = 0, x_2 \ge 0, x_4 = 3 \end{aligned}$$

Bei $x_2 \le 10$ handelt es sich um eine singleton row damit wird 10 neue obere Schranke von x_2
Da Koeffizient in der Zielfunktion negativ ist und ein Minimierungsproblem vorliegt kann x_2 an obere Schranke fixiert werden und es ergibt sich ein Zielfunktionswert von $-3*10+3=-27$

Aufgabe 3)

a)

$$\begin{aligned} &\max 2x_1 - 6x_2 \\ &s.t.\quad -x_1 - x_2 - x_3 \le -2 \\ &\qquad 2x_1 - x_2 + x_3 \le 1 \\ &\qquad\qquad x_i \ge 0 \end{aligned}$$

Primale Zulassigkeit: (Folie 10, Seite 32)

$Ax + w = b$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Duale Zulässigkeit (Folie 10, Seite 32)

$A^T y - z = c$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Initial-Lösungen:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berechnung der primalen Unzulässigkeit ρ: (Folie 10, Seite 33)

$\rho = b - Ax - w$

$$\rho = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Berechnung der dualen Unzulässigkeit σ: (Folie 10, Seite 34)

$$\sigma = c - A^T y + z$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berechnung der Komplementarität γ: (Folie 10, Seite 34)

$$\gamma = z^T x + y^T w$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5$$

$$\mu = \frac{\gamma}{n+m} = \frac{5}{2+3} = 1$$

Das Gleichungssystem wird jetzt für $\delta = 1/10$ gelöst:

$$A\Delta x + \Delta w = \rho$$

$$A^T \Delta y - \Delta z = \sigma$$

$$Z\Delta x + X\Delta z = \mu e - XZe$$

$$W\Delta y + Y\Delta w = \mu e - YWe$$

Unter Einsetzung der konkreten Werte ergibt sich: (Folie 10, Seite 35)

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta w_1 \\ \Delta w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \\ \Delta z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \\ \Delta z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/10 - 1 \\ 1/10 - 1 \\ 1/10 - 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta w_1 \\ \Delta w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/10 - 1 \\ 1/10 - 1 \end{pmatrix}$$

Diese vielen Gleichungen in MuPAD eingesetzt ergibt:

```
solve({-x1-x2-x3+w1=0,2*x1-x2+x3+w2=-2,-y1+2*y2-z1=2,-y1-y2-z2=-3,-y1+y2-z3=1,x1+z1=-9/10,x2+z2=-9/10,x3+z3=-9/10,y1+w1=-9/10,y2+w2=-9/10},{x1,x2,x3,w1,w2,y1,y2,z1,z2,z3})
```

$$\Delta x = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -7/5 \\ -2/15 \end{pmatrix}, \quad \Delta z = \begin{pmatrix} -2/5 \\ 1/2 \\ -23/30 \end{pmatrix}, \quad \Delta w = \begin{pmatrix} -61/30 \\ -34/15 \end{pmatrix}, \quad \Delta y = \begin{pmatrix} 17/15 \\ 41/30 \end{pmatrix}$$

Schrittweite: (Folie 10, Seite 36)

$$\Theta = r\left(\max_{ij} \left\{ -\frac{\Delta x_j}{x_j}, -\frac{\Delta w_i}{w_i}, -\frac{\Delta y_i}{y_i}, -\frac{\Delta z_j}{z_j} \right\} \right)^{-1} = r * \left(\frac{34}{15}\right)^{-1} = \frac{9}{10} * \frac{15}{34} = \frac{27}{68}$$

Update der Lösunge: (Folie 10, Seite 37)

$x \leftarrow x + \Theta\Delta x,\ w \leftarrow w + \Theta\Delta w,\ y \leftarrow y + \Theta\Delta y,\ z \leftarrow z + \Theta\Delta z$

$$x = \begin{pmatrix} 109/136 \\ 151/170 \\ 161/170 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 143/170 \\ 163/136 \\ 473/680 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 131/680 \\ 1/10 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 29/20 \\ 1049/680 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{aligned} &\max - x_1 - 3x_2 - x_3 \\ &s.t.\ \ 2x_1 - 5x_2 + x_3 \le -5 \\ &\qquad 2x_1 - x_2 + 2x_3 \le 4 \\ &\qquad\qquad\qquad x_i \ge 0 \end{aligned}$$

Primale Zulassigkeit: (Folie 10, Seite 32)

$Ax + w = b$

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Duale Zulässigkeit (Folie 10, Seite 32)

$A^T y - z = c$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -5 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Initial-Lösungen:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berechnung der primalen Unzulässigkeit ρ: (Folie 10, Seite 33)

$\rho = b - Ax - w$

$$\rho = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Berechnung der dualen Unzulässigkeit σ: (Folie 10, Seite 34)

$\sigma = c - A^T y + z$

$$\sigma = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -5 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Berechnung der Komplementarität γ: (Folie 10, Seite 34)

$$\gamma = z^T x + y^T w$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5$$

$$\mu = \frac{\gamma}{n+m} = \frac{5}{2+3} = 1$$

Das Gleichungssystem wird jetzt für $\delta = 1/10$ gelöst:

$$A\Delta x + \Delta w = \rho$$

$$A^T \Delta y - \Delta z = \sigma$$

$$Z\Delta x + X\Delta z = \mu e - XZe$$

$$W\Delta y + Y\Delta w = \mu e - YWe$$

Unter Einsetzung der konkreten Werte ergibt sich: (Folie 10, Seite 35)

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta w_1 \\ \Delta w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -5 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \\ \Delta z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \\ \Delta z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/10-1 \\ 1/10-1 \\ 1/10-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta w_1 \\ \Delta w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/10-1 \\ 1/10-1 \end{pmatrix}$$

Diese vielen Gleichungen in MuPAD eingesetzt ergibt:

```
solve({2*x1-5*x2+x3+w1=-4,2*x1-x2+2*x3+w2=0,2*y1+2*y2-z1=-4,-5*y1-y2-z2=4,y1+2*y2-z3=-3,x1+z1=-9/10,x2+z2=-9/10,x3+z3=-9/10,y1+w1=-9/10,y2+w2=-9/10},{x1,x2,x3,w1,w2,y1,y2,z1,z2,z3})
```

$$\Delta x = \begin{pmatrix} -127/210 \\ 16/35 \\ 19/70 \end{pmatrix}, \quad \Delta z = \begin{pmatrix} -31/105 \\ -19/14 \\ -41/35 \end{pmatrix}, \quad \Delta w = \begin{pmatrix} -163/210 \\ 118/105 \end{pmatrix}, \quad \Delta y = \begin{pmatrix} -13/105 \\ -85/42 \end{pmatrix}$$

Schrittweite: (Folie 10, Seite 36)

$$\Theta = r\left(\max_{ij} \left\{ -\frac{\Delta x_j}{x_j}, -\frac{\Delta w_i}{w_i}, -\frac{\Delta y_i}{y_i}, -\frac{\Delta z_j}{z_j} \right\} \right)^{-1} = r * \left(\frac{85}{42} \right)^{-1} = \frac{9}{10} * \frac{42}{85} = \frac{189}{425}$$

Update der Lösunge: (Folie 10, Seite 37)

$x \leftarrow x + \Theta\Delta x,\ w \leftarrow w + \Theta\Delta w,\ y \leftarrow y + \Theta\Delta y,\ z \leftarrow z + \Theta\Delta z$

$$x = \begin{pmatrix} 3107/4250 \\ 2557/2125 \\ 4763/4250 \end{pmatrix},\quad z = \begin{pmatrix} 1846/2125 \\ 337/850 \\ 1018/2125 \end{pmatrix},\quad w = \begin{pmatrix} 2783/4250 \\ 3187/2125 \end{pmatrix},\quad y = \begin{pmatrix} 2008/2125 \\ 1/10 \end{pmatrix}$$

c)

$$\max 6x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 9x_4$$
$$s.t.\quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$
$$x_i \ge 0$$

Problem umformulieren:

$$\max 6x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 9x_4$$
$$s.t.\quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 1$$
$$-x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \le -1$$
$$x_i \ge 0$$

Primale Zulassigkeit: (Folie 10, Seite 32)

$Ax + w = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Duale Zulässigkeit (Folie 10, Seite 32)

$A^T y - z = c$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Initial-Lösungen:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berechnung der primalen Unzulässigkeit ρ: (Folie 10, Seite 33)

$\rho = b - Ax - w$

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Berechnung der dualen Unzulässigkeit σ: (Folie 10, Seite 34)

$\sigma = c - A^T y + z$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Berechnung der Komplementarität γ: (Folie 10, Seite 34)

$\gamma = z^T x + y^T w$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 6$$

$$\mu = \frac{\gamma}{n+m} = \frac{6}{4+2} = 1$$

Das Gleichungssystem wird jetzt für $\delta = 1/10$ gelöst:

$A\Delta x + \Delta w = \rho$

$A^T \Delta y - \Delta z = \sigma$

$Z\Delta x + X\Delta z = \mu e - XZe$

$W\Delta y + Y\Delta w = \mu e - YWe$

Unter Einsetzung der konkreten Werte ergibt sich: (Folie 10, Seite 35)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta w_1 \\ \Delta w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/10-1 \\ 1/10-1 \\ 1/10-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta w_1 \\ \Delta w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/10-1 \\ 1/10-1 \end{pmatrix}$$

Diese vielen Gleichungen in MuPAD eingesetzt ergibt:

solve({x1+x2+x3+x4+w1=-4,-x1-x2-x3-x4+w2=2,y1-y2-z1=7,y1-y2-z2=9,y1-y2-z3=6,y1-y2-z4=10,x1+z1=-9/10,x2+z2=-9/10,x3+z3=-9/10,x4+z4=-9/10,y1+w1=-9/10,y2+w2=-9/10},{x1,x2,x3,x4,w1,w2,y1,y2,z1,z2,z3,z4})

$$\Delta x = \begin{pmatrix} -79/90 \\ 101/90 \\ -169/90 \\ 191/90 \end{pmatrix}, \quad \Delta z = \begin{pmatrix} -1/45 \\ -91/45 \\ 44/45 \\ -136/45 \end{pmatrix}, \quad \Delta w = \begin{pmatrix} -202/45 \\ 112/45 \end{pmatrix}, \quad \Delta y = \begin{pmatrix} 323/90 \\ -61/18 \end{pmatrix}$$

Schrittweite: (Folie 10, Seite 36)

$$\Theta = r\left(\max_{ij}\left\{-\frac{\Delta x_j}{x_j}, -\frac{\Delta w_i}{w_i}, -\frac{\Delta y_i}{y_i}, -\frac{\Delta z_j}{z_j}\right\}\right)^{-1} = r * \left(\frac{202}{45}\right)^{-1} = \frac{9}{10} * \frac{45}{202} = \frac{81}{404}$$

Update der Lösunge: (Folie 10, Seite 37)

$x \leftarrow x + \Theta\Delta x,\ w \leftarrow w + \Theta\Delta w,\ y \leftarrow y + \Theta\Delta y,\ z \leftarrow z + \Theta\Delta z$

$$x = \begin{pmatrix} 3329/4040 \\ 49/40 \\ 2519/4040 \\ 5759/4040 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 2011/2020 \\ 1201/2020 \\ 604/505 \\ 199/505 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1/10 \\ 757/505 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 6947/4040 \\ 259/808 \end{pmatrix}$$