Aufgabe 1)

Gegebenes Problem in Standardform (primal)

$$
\begin{array}{llllllllllllllllll}
\max & - & 3x_1^+ & + & 3x_1^- & + & x_2 \\
\text{s. t.} & & x_1^+ & - & x_1^- & - & 6x_2 & + & x_3 & - & x_4^+ & + & x_4^- & \le & 3 \\
 & & & & & & 7x_2 & & & + & 2x_4^+ & - & 2x_4^- & \le & 5 \\
 & & & & & - & 7x_2 & & & - & 2x_4^+ & + & 2x_4^- & \le & -5 \\
 & & x_1^+ & - & x_1^- & + & x_2 & + & x_3 & & & & & \le & 1 \\
 & - & x_1^+ & + & x_1^- & - & x_2 & - & x_3 & & & & & \le & -1 \\
 & & & & & & & & x_3 & + & x_4^+ & - & x_4^- & \le & 2 \\
 & & & & & & & & & & x_4^+ & - & x_4^- & \le & 200 \\
 & & & & & & & & & - & x_4^+ & + & x_4^- & \le & 100 \\
 & & & & & & & & & & & & x_i & \ge & 0
\end{array}
$$

Das zugehörige duale Problem

$$
\begin{array}{llllllllllllllllllll}
\min & & 3y_1 & + & 5y_2 & - & 5y_3 & + & y_4 & - & y_5 & + & 2y_6 & + & 200y_7 & + & 100y_8 \\
\text{s. t.} & & y_1 & & & & & + & y_4 & - & y_5 & & & & & & & \ge & -3 \\
 & - & y_1 & & & & & - & y_4 & + & y_5 & & & & & & & \ge & 3 \\
 & - & 6y_1 & + & 7y_2 & - & 7y_3 & + & y_4 & - & y_5 & & & & & & & \ge & 1 \\
 & & y_1 & & & & & + & y_4 & - & y_5 & + & y_6 & & & & & \ge & 0 \\
 & - & y_1 & + & 2y_2 & - & 2y_3 & & & & & + & y_6 & + & y_7 & - & y_8 & \ge & 0 \\
 & & y_1 & - & 2y_2 & + & 2y_3 & & & & & - & y_6 & - & y_7 & + & y_8 & \ge & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & y_i & \ge & 0
\end{array}
$$

Das duale Problem

$$
\begin{array}{llllllllllllllll}
\max & - & 3y_1 & + & 5y_2 & + & y_3 & + & 2y_4 & - & 100a_1 & + & 200a_2 \\
\text{s. t.} & - & y_1 & & & + & y_3 & & & & & & & = & 3 \\
 & & 6y_1 & + & 7y_2 & + & y_3 & & & & & & & \le & -1 \\
 & - & y_1 & & & + & y_3 & + & y_4 & & & & & \le & 0 \\
 & & y_1 & + & 2y_2 & & & + & y_4 & + & a_1 & + & a_2 & = & 0 \\
 & & y_4, a_2 & \le & 0 & & y_2, y_3 & = & \text{frei} & & & & y_1, a_1 & \ge & 0
\end{array}
$$

Aufgabe 2)

a)

LP in Gleichungsform

$$
\begin{array}{lll|ll|llll}
\max z & = & 0 & - & 5x_1 & - & 11x_2 & - & 8x_3 \\
\hline
x_4 & = & -5 & + & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 \\
\hline
x_5 & = & -4 & + & 3x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 \\
x_6 & = & -3 & + & x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 \\
 & & & & & & x_i & \ge & 0
\end{array}
$$

Zuerst wird eine primal unzulässige Basisvariable x_i ausgewählt, die die Basis verlässt, hier x_4 (die kleinste der negativen Zahlen). Als eintretende NBV kommen nur diejenigen in Betracht, die einen negativen Koeffizienten in der Zielfunktion haben. Hier x_1, weil diese zur größtmöglichen Verbesserung der dualen Zielfunktion führt, ohne dass eine NBV dual unzulässig wird.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\max z & = & -25/2 & - & 5/2\,x_4 & - & x_2 & - & 1/2\,x_3 \\
x_1 & = & 5/2 & + & 1/2\,x_4 & - & 2\,x_2 & - & 3/2\,x_3 \\
x_5 & = & 7/2 & + & 3/2\,x_4 & - & 5\,x_2 & - & 1/2\,x_3 \\
x_6 & = & -1/2 & + & 1/2\,x_4 & & & + & 1/2\,x_3 \\
 & & & & & & x_i & \geq & 0
\end{array}
$$

Begründung s. o.!

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\max z & = & -13 & - & 2\,x_4 & - & x_2 & - & x_6 \\
x_1 & = & 1 & + & 2\,x_4 & - & 2\,x_2 & - & 3\,x_6 \\
x_5 & = & 3 & + & 2\,x_4 & - & 5\,x_2 & - & x_6 \\
x_3 & = & 1 & - & x_4 & & & + & 2\,x_6 \\
 & & & & & & x_i & \geq & 0
\end{array}
$$

Begründung s. o.!

Die Lösung ist Optimal, da sie primal zulässig ist.

b)

Problem in Standardform

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\max z & = & & - & x_1 & - & 3\,x_2 & - & 2\,x_3 \\
x_4 & = & -2 & & & + & 2\,x_2 & - & x_3 \\
x_5 & = & 1 & & & - & 4\,x_2 & + & 3\,x_3 \\
x_6 & = & -8 & + & 2\,x_1 & + & 6\,x_2 & + & 4\,x_3 \\
 & & & & & & x_i & \geq & 0
\end{array}
$$

$B=\{4,5,6\}, \quad N=\{1,2,3\}, \quad z=0$

$y^T = c_B^T B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\bar{c}_N = c_N - y^T A_N = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}$

Die BV x_6 hat primal die höchste Unzulässigkeit und ist damit als austretende Variable markiert.
Die Basislösung ist dual zulässig!

1. Iteration (i=6, p=3)

i := verlassende Variable / p := Position/Spalte der verlassenden BV in B

$$vB = vE_0 = e_3^T \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad v_1 = 0,\ v_2 = 0,\ v_3 = 1$$

$$w_N = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = vA_N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ -2 & -6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

Quotiententest: $-\bar{c}_s + \bar{a}_{is}\theta \geq 0 \quad \forall s \in N$

$1 - 2\theta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \theta \leq 1/2$

$3 - 6\theta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \theta \leq 1/2$ j frei wählbar, z. B. $j = 1$

$2 - 4\theta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \theta \leq 1/2$

$z \leftarrow z + \theta x_6 = 0 + 1/2 * (-8) = -4$

$$Bd = a_{.j} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$t = x_6^* / w_1 = -8/-2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 4$$

$$x_B^* = \begin{pmatrix} x_4^* \\ x_5^* \\ x_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-0t \\ 1-0t \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad oder \;\; x_B = B^{-1}b - td \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B = E_1 \;\; with \;\; E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{c}_6 & \bar{c}_2 & \bar{c}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{c}_6 & -3-6\bar{c}_6 & -2-4\bar{c}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad oder$$

$$\begin{pmatrix} \bar{c}_1 & \bar{c}_2 & \bar{c}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} - 1/2\begin{pmatrix} -2 & -6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \{4,5,1\}, \quad N = \{6,2,3\}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_N = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix}, \quad E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Iteration (i=4, p=1)

$$vE_1 = e_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad v_1 = 1, \; v_2 = 0, \; v_3 = 0$$

$$w_N = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = vA_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ -2 & -6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Quotiententest: $-\bar{c}_s + \bar{a}_{is}\theta \geq 0 \quad \forall s \in N$

$\theta = 0 \quad j = 2$

$z \leftarrow z + \theta x_4 = -4 + 0*(-2) = -4$ ~> degenerierte Iteration

$$Bd = a_{.j} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} d = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$t = x_4^* / w_2 = -2/-2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1$$

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{c}_6 & \bar{c}_4 & \bar{c}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \{2,5,1\}, \quad N = \{6,4,3\}$$

3. Iteration (i=5, p=2)

$$v^2 E_2 = e_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} v_1^2 & v_2^2 & v_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad v_1^2 = 2,\ v_2^2 = 1,\ v_3^2 = 0$$

$$v^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad vE_1 = v^2 \qquad \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad v = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$w_N = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = vA_N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Quotiententest: $-\bar{c}_s + \bar{a}_{is}\theta \geq 0 \quad \forall s \in N$
$\theta = 0 \quad j = 3$
$z \leftarrow z + \theta x_4 = -4 + 0 * (-3) = -4$ ~> degenerierte Iteration

$$Bd = a_{.j} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & -2 \end{pmatrix} d = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad E_1 d^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1^1 \\ d_2^1 \\ d_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad d^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$E_2 d = d^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} d = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 7/2 \end{pmatrix}$$

$$t = x_5^* / w_3 = -3/-1 = 3 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 3$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 7/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 0 \\ -19/2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ -6 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{c}_6 & \bar{c}_4 & \bar{c}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \{2,3,1\}, \quad N = \{6,4,5\}$$

4. Iteration (i=1, p=3)

$$v^3 E_3 = e_3 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} v_1^3 & v_2^3 & v_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} v_1^3 = 0,\ -1/2 v_1^3 - v_2^3 + 7/2 v_3^3 = 0,\ v_3^3 = 1 \\ -v_2^3 + 7/2 = 0 \Leftrightarrow v_2^3 = 7/2 \end{matrix}$$

$$v^2 E_2 = v^3$$

$$\begin{pmatrix} v_1^2 & v_2^2 & v_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7/2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} -2v_1^2 + 4v_2^2 + 3v_3^2 = 0,\ v_2^2 = 7/2,\ v_3^2 = 1 \\ -2v_1^2 + 14 + 3 = 0,\ v_1^2 = 17/2 \end{matrix}$$

$$v E_1 = v^2$$

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17/2 & 7/2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad v_1 = 17/2,\ v_2 = 7/2,\ v_3 = -1/2$$

$$w_N = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = v A_N = \begin{pmatrix} 17/2 & 7/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 17/2 & 7/2 \end{pmatrix}$$

Quotiententest: $-\bar{c}_s + \bar{a}_{is}\theta \geq 0 \quad \forall s \in N$

$\theta = \bar{c}_6 / w_3 = 1 \qquad j = 6$

$z \leftarrow z + \theta x_1 = -4 + 1 * (-19/2) = -27/2$

$$Bd = a_{.j} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} d^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_1 d^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} d_1^1 = 0 \\ d_2^1 = 0 \\ d_3^1 = -1/2 \end{matrix}$$

$$E_2 d^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} d^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} d_1^2 = 0 \\ d_2^2 = 0 \\ d_3^2 = -1/2 \end{matrix}$$

$$E_3 d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7/2 & 1 \end{pmatrix} d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} d_1 = 0 \\ d_2 = 0 \\ d_3 = -1/2 \end{matrix}$$

$$t = x_1^* / w_3 = -19/2 / -1/2 = 19 \quad \Rightarrow \quad x_6 = 19$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 3 \\ -19/2 \end{pmatrix} - 19 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ -6 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{c}_1 & \bar{c}_4 & \bar{c}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -17/2 & -7/2 \end{pmatrix} \qquad B = \{2,3,6\}, \quad N = \{1,4,5\}$$

$$x_B^* = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 3 \\ 19 \end{pmatrix},\ x_N^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ z^* = -27/2$$

Diese Lösung ist Optimal, weil die Basis jetzt auch primal zulässig.

Aufgabe 3)

a)

Matrixnotation der reduzierten Kosten: $\bar{c}_N = c_N - c_B B^{-1} A_N$

b)

Der primale Simplex bricht ab (Maximierung), wenn alle Koeffizienten (reduced cost) der Zielfunktion $\bar{c}_N \leq 0$ sind.

c)

Eine Basis B heißt dual zulässig (Maximierung), wenn alle Koeffizienten der Zielfunktion $\bar{c}_N \leq 0$ sind.

d)

Das primale Optimalitätskriterium im primalen Simplexalgorithmus für LPs in allgemeiner Form lautet: Die Basislösung ist optimal, wenn alle NBV, die sich an ihrer unteren Schranke befinden, ZF-Koeffizienten haben, die ≤ 0 sind und umgekehrt gilt für NBV, die sich an ihren oberen Schranken befinden, dass die ZF-Koeffizienten ≥ 0 sind.

e)

Wenn das duale Problem (D) eine zulässige Lösung hat, dann ist das primale Problem (P) optimal, aber nicht zwingend zulässig. Wenn P auch zulässig ist, dann ist D auch optimal. Das Optimalitätskriterium für allgemeine LPs gilt gem. Teilaufgabe d).

f)

Entwicklung eines Quotiententests für den revidierten dualen Simplex in der allgemeinen Form:
Wichtig: hier müssen beide Schranken betrachtet werden!
Der Quotiententest in einer Simplexiteration stellt sicher, das diejenige NBV als Eintretende gewählt wird, welche die größtmögliche Verbesserung der dualen ZF erreicht, ohne dabei die Restriktionen ungültig werden zu lassen (…ohne dass eine NBV dual unzulässig wird / vgl. Folie 7, Vorlesung 6). Die Schrittweite wird dabei wie folgt bestimmt:

$\theta = \bar{c}_j / w_j$

Notwendige Gleichungssysteme zu lösen:

$w_N = vA_N,\ wobei\ v = e_p B^{-1}$

Die duale Zulässigkeit kann man anhand der nicht-negativen ZF-Koeffizienten des primalen Problems ablesen. Hier findet nach einem Basistausch eine Änderung statt. $\bar{c}_N$ ändert sich folgendermaßen:

$\bar{c}_j \leftarrow 0 \qquad x_i\ verlässt\ Basis;\ x_j\ tritt\ in\ die\ Basis\ ein$

$\bar{c}_i \leftarrow -\frac{\bar{c}_j}{w_j} \qquad i\ steht\ in\ B\ an\ p-ter\ Position$

$\bar{c}_j \leftarrow \bar{c}_s - w_s \frac{\bar{c}_j}{w_j} \qquad (s \in N\ ohne\ \{j\})$

Damit die duale Zulässigkeit sichergestellt ist, muss die Schrittweite
$\theta \geq 0$ *sein, falls* $x_i < l_i$ *und* $\theta \leq 0$ *sein, falls* $x_i > u_i$

2 Fälle sind wegen den Schranken zu unterscheiden:

Fall 1: $\bar{c}_s - w_s \frac{\bar{c}_j}{w_j} \leq 0 \Leftrightarrow \bar{c}_s \leq w_s \frac{\bar{c}_j}{w_j} \Leftrightarrow \frac{\bar{c}_s}{w_s} \leq \frac{\bar{c}_j}{w_j}$: dies gilt, wenn $x_s = l_s$

Fall 2: $\bar{c}_s - w_s \frac{\bar{c}_j}{w_j} \geq 0 \Leftrightarrow \bar{c}_s \geq w_s \frac{\bar{c}_j}{w_j} \Leftrightarrow \frac{\bar{c}_s}{w_s} \geq \frac{\bar{c}_j}{w_j}$: dies gilt, wenn $x_s = u_s$

Laut Folie 7, Vorlesung 6 ist bei Fehlen einer primalen NBV x_j (als eintretende Variable) – unter der Bedingung, dass eine duale NBV unzulässig wird – das LP dual unbeschränkt (und primal unzulässig).

Ist aber eine obere Schranke für θ vorhanden, wird da Minimum aus $j \in \arg\min_{s \in F^+} \frac{\bar{c}_s}{w_s}$ gewählt.

Äquivalente vorgehensweise gilt für die untere Schranke

Aufgabe 4)

Beispielproblem (siehe Folie 13, Vorlesung 7)

$$\begin{array}{llllll} \max & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & \\ \text{s. t.} & 2x_1 & & x_2 & & & \leq \\ & & & & & x_3 & \leq \\ & & & & & x_i & \geq & 0 \end{array}$$

Standardproblem

$$\begin{array}{lllllllll} \max z & = & 0 & + & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 \\ x_4 & = & 4 & - & 2x_1 & - & x_2 & & \\ x_5 & = & 5 & & & & & - & x_3 \\ & & & & & & x_i & \geq & 0 \end{array}$$

x_3 ist die eintretende Variabel und x_5 verlässt die Basis

nach der ersten Iteration

$$\begin{array}{lllllllll} \max z & = & 25 & + & 3x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_5 \\ x_4 & = & 4 & - & 2x_1 & - & x_2 & & \\ x_3 & = & 5 & & & & & - & x_5 \\ & & & & & & x_i & \geq & 0 \end{array}$$

Jetzt müsste nach der Dantzig-Regel die NBV x_1 als eintretende ausgewählt werden und x_4 würde die Basis verlassen.

Steepest-Edge-Pricing

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \scriptstyle x_1 \; x_2 \; x_3 \; x_4 \; x_5 \end{array} \qquad A_N = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \scriptstyle x_1 \; x_2 \; x_5 \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \scriptstyle x_3 \; x_4 \end{array}$$

$$Bd^j = a_{.j} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} d^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow d^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} 0 * d_1^1 + 1 * d_2^1 = 2 \\ 1 * d_1^1 + 0 * d_2^1 = 0 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} d^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad d^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 0 * d_1^2 + 1 * d_2^2 = 1 \\ 1 * d_1^2 + 0 * d_2^2 = 0 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} d^5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad d^5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 0 * d_1^5 + 1 * d_2^5 = 0 \\ 1 * d_1^5 + 0 * d_2^5 = 1 \end{matrix}$$

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} -d_1^1 \\ -d_2^1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{c^T \sigma^1}{\left\| \sigma^1 \right\|} = \frac{3}{\sqrt{5}} \approx 1,34 \qquad \frac{c^T \sigma^2}{\left\| \sigma^2 \right\|} = \frac{2}{\sqrt{2}} \approx 1,41 \qquad \frac{c^T \sigma^1}{\left\| \sigma^1 \right\|} = \frac{-5}{\sqrt{2}} \approx -3,53$$

$$q \in \arg\max_{j \in N} \frac{c^T \sigma^j}{\left\| \sigma^j \right\|} = 2 \qquad \Rightarrow x_2 \text{ wird als eintretende Variable gewählt.}$$

Die optimale Lösung ergibt sich bei Anwendung von Steepest Edge Pricing bereits nach der 2 Iteration. I. d. R. erhält man damit eher die gewünschte Optimalität, weil hier die Kante gewählt wird, die den kleinsten Winkel aller möglichen Kanten zum Normalvektor der Zielfunktion bildet.