Aufgabe 1)

1) max

$$\begin{array}{ccccc}
6\,x_1 & 8\,x_2 & 5\,x_3 & 9\,x_4 & \\
2\,x_1 & x_2 & x_3 & 3\,x_4 & \leq 5 \\
x_1 & 3\,x_2 & x_3 & 2\,x_4 & \leq 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 & & & \geq 0
\end{array}$$

äquivalentes LP in Gleichungsform

$$\begin{array}{ccccccccccc|c}
\max z & = & 0 & + & 6\,x_1 & + & 8\,x_2 & + & 5\,x_3 & + & 9\,x_4 & \\
x_5 & = & 5 & - & 2\,x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & 3\,x_4 & 5/3 \\
x_6 & = & 3 & - & x_1 & - & 3\,x_2 & - & x_3 & - & 2\,x_4 & 3/2 \\
 & & & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geq 0 &
\end{array}$$

zulässige Basislösung: $x_1, x_2, x_3, x_4 = 0$, $x_5 = 5$, $x_6 = 3$ mit z = 0

Pivotspalte: x_4 / Pivotzeile: x_6

$$\begin{array}{ccccccccccc|c}
\max z & = & 27/2 & + & 3/2\,x_1 & - & 11/2\,x_2 & + & 1/2\,x_3 & - & 9/2\,x_6 & \\
x_4 & = & 3/2 & - & 1/2\,x_1 & - & 3/2\,x_2 & - & 1/2\,x_3 & - & 1/2\,x_6 & 3 \\
x_5 & = & 1/2 & - & 1/2\,x_1 & + & 7/2\,x_2 & + & 1/2\,x_3 & + & 3/2\,x_6 & 1 \\
 & & & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geq 0 &
\end{array}$$

Pivotspalte: x_1 / Pivotzeile: x_5

$$\begin{array}{ccccccccccc|c}
\max z & = & 15 & + & 5\,x_2 & + & 2\,x_3 & - & 3\,x_5 & & & \\
x_1 & = & 1 & + & 7\,x_2 & + & x_3 & - & 2\,x_5 & + & 3\,x_6 & \infty \\
x_4 & = & 1 & - & 5\,x_2 & - & x_3 & + & x_5 & - & 2\,x_6 & 1/5 \\
 & & & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geq 0 &
\end{array}$$

Pivotspalte: x_2 / Pivotzeile: x_4

$$\begin{array}{ccccccccccc|c}
\max z & = & 16 & + & x_3 & - & x_4 & - & 2\,x_5 & - & 2\,x_6 & \\
x_1 & = & 12/5 & - & 2/5\,x_3 & - & 7/5\,x_4 & - & 3/5\,x_5 & + & 1/5\,x_6 & 6 \\
x_2 & = & 1/5 & - & 1/5\,x_3 & - & 1/5\,x_4 & + & 1/5\,x_5 & - & 2/5\,x_6 & 1 \\
 & & & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geq 0 &
\end{array}$$

Pivotspalte: x_3 / Pivotzeile: x_2

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\max z & = & 17 & - & 5\,x_2 & - & 2\,x_4 & - & x_5 & - & 4\,x_6 \\
x_1 & = & 2 & + & 2\,x_2 & - & x_4 & - & x_5 & + & x_6 \\
x_3 & = & 1 & - & 5\,x_2 & - & x_4 & + & x_5 & - & 2\,x_6 \\
 & & & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geq 0
\end{array}$$

Keine weitere Verbesserung mehr möglich, weil die Koeffizienten in der Zielfunktion alle negativ sind.
Die optimale Lösung lautet: z = 17 mit $x_1 = 2$, $x_3 = 1$, $x_2 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$

2) max

$$\begin{array}{llll} -x_1 & -3x_2 & -x_3 & \\ 2x_1 & -5x_2 & 2x_3 & \leq -5 \\ 2x_1 & -x_2 & x_3 & \leq 4 \\ & & x_1, x_2, x_3 & \geq 0 \end{array}$$

äquivalentes LP in Gleichungsform

$$\begin{array}{lcccccccc} \max z & = & 0 & - & x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 \\ x_4 & = & -5 & - & 2x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 \\ x_5 & = & 4 & - & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 \\ & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & & \geq 0 \end{array}$$

unzulässige Basislösung: $x_1, x_2, x_3 = 0$, $x_4 = -5$ $x_5 = 4$ mit z = 0

Hilfsproblem lösen

$$\begin{array}{lcccccccccc} \min & & & & & & & & & & x_0 \\ x_4 & = & -5 & - & 2x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 & + & x_0 \\ x_5 & = & 4 & - & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_0 \\ & & & & & & & & x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & & \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccccccc} \max w & = & & & & & & & & - & \boxed{x_0} \\ x_4 & = & -5 & - & 2x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 & + & \boxed{x_0} \\ x_5 & = & 4 & - & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & \boxed{x_0} \\ & & & & & & & & x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & & \geq 0 \end{array}$$

Pivotspalte: x_0 / Pivotzeile: x_4

x_0 in die Basis pivotieren, so dass die höchste Unzulässigkeit behoben wird, in diesem Fall die –5

$$\begin{array}{lcccccccccc} \max w & = & -5 & - & 2x_1 & + & \boxed{5x_2} & - & 2x_3 & - & x_4 \\ x_0 & = & 5 & + & 2x_1 & - & \boxed{5x_2} & + & 2x_3 & + & x_4 \\ x_5 & = & 9 & & & - & \boxed{4x_2} & + & x_3 & + & x_4 \\ & & & & & & & & x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & & \geq 0 \end{array}$$

zulässige Basislösung: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, $x_5 = 9$, $x_0 = 5$ mit z = –5

Pivotspalte: x_2 / Pivotzeile: x_0

Optimum des Hilfsproblem bestimmen

$$\begin{array}{lcccccccccc} \max w & = & & & & & & & & - & x_0 \\ x_2 & = & 1 & + & 2/5\,x_1 & + & 2/5\,x_3 & + & 1/5\,x_4 & - & 1/5\,x_0 \\ x_5 & = & 5 & - & 8/5\,x_1 & - & 3/5\,x_3 & + & 1/5\,x_4 & + & 4/5\,x_0 \\ & & & & & & & & x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & & \geq 0 \end{array}$$

Keine weitere Verbesserung mehr möglich, weil alle Koeffizienten der ZF negativ sind.
Optimale Lösung des Hilfsproblems lautet: $x_0 = x_1 = x_3 = x_4 = 0$, $x_2 = 1$, $x_5 = 5$ mit w = 0

zugehörige Formulierung des Originalproblems (x_0 -Spalte entfällt)

$$z = -x_1 - 3x_2 - x_3 = -x_1 - 3\left(1 + \frac{2}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4\right) - x_3 = -3 - \frac{11}{5}x_1 - \frac{11}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4$$

max z	=	–3	–	$11/5\,x_1$	–	$11/5\,x_3$	–	$3/5\,x_4$
x_2	=	1	+	$2/5\,x_1$	+	$2/5\,x_3$	+	$1/5\,x_4$
x_5	=	5	–	$8/5\,x_1$	–	$3/5\,x_3$	+	$1/5\,x_4$
						x_1, x_2, x_3, x_4, x_5		≥ 0

hier sieht man sofort, dass der ZF-Wert nicht mehr verbessert werden kann
→ optimale Lösung des LP-Problems: $x_1 = x_3 = x_4 = 0,\; x_2 = 1,\; x_5 = 5$ mit z = –3

3) max

x_1	$3\,x_2$	
$-x_1$	$-x_2$	≤ -3
$-x_1$	$+x_2$	≤ -1
$-x_1$	$+2\,x_2$	≤ 2
	x_1, x_2	≥ 0

äquivalentes LP in Gleichungsform

max z	=	0	+	x_1	+	$3\,x_2$
x_3	=	–3	+	x_1	+	x_2
x_4	=	–1	+	x_1	–	x_2
x_5	=	2	+	x_1	–	$2\,x_2$
				x_1, x_2, x_3, x_4, x_5		≥ 0

unzulässige Basislösung: $x_1, x_2 = 0,\; x_3 = -3,\; x_4 = -1\;\; x_5 = 2$ mit z = 0

Hilfsproblem lösen

min								x_0
x_3	=	–3	+	x_1	+	x_2	+	x_0
x_4	=	–1	+	x_1	–	x_2	+	x_0
x_5	=	2	+	x_1	–	$2\,x_2$	+	x_0
						$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$		≥ 0

max w	=							$-x_0$
x_3	=	–3	+	x_1	+	x_2	+	x_0
x_4	=	–1	+	x_1	–	x_2	+	x_0
x_5	=	2	+	x_1	–	$2\,x_2$	+	x_0
						$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$		≥ 0

Pivotspalte: x_0 / Pivotzeile: x_3

x_0 in die Basis pivotieren, so dass die höchste Unzulässigkeit behoben wird, in diesem Fall die –3

$$
\begin{array}{lcrclclcl}
\max w & = & -3 & + & x_1 & + & x_2 & - & x_3 \\
x_0 & = & 3 & - & x_1 & - & x_2 & + & x_3 \\
x_4 & = & 2 & & & - & 2x_2 & + & x_3 \\
x_5 & = & 5 & & & - & 3x_2 & + & x_3 \\
 & & & & & & \multicolumn{3}{l}{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0}
\end{array}
$$

zulässige Basislösung: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = 2$, $x_5 = 5$, $x_0 = 3$ mit $z = -3$
Pivotspalte: x_1 / Pivotzeile: x_0

Optimum des Hilfsproblem bestimmen

$$
\begin{array}{lcrclclcl}
\max w & = & & & & & & - & x_0 \\
x_1 & = & 3 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_0 \\
x_4 & = & 2 & - & 2x_2 & + & x_3 & & \\
x_5 & = & 5 & - & 3x_2 & + & x_3 & & \\
 & & & & \multicolumn{5}{l}{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0}
\end{array}
$$

Keine weitere Verbesserung mehr möglich, weil alle Koeffizienten der ZF negativ sind.
Optimale Lösung des Hilfsproblems lautet: $x_0 = x_2 = x_3 = 0$, $x_1 = 3$, $x_4 = 2$, $x_5 = 5$ mit $w = 0$

zugehörige Formulierung des Originalproblems (x_0 -Spalte entfällt)

$$z = x_1 + 3x_2 = (3 - x_2 + x_3) + 3x_2 = 3 + 2x_2 + x_3$$

$$
\begin{array}{lcrclcl}
\max z & = & 3 & + & 2x_2 & + & x_3 \\
x_1 & = & 3 & - & x_2 & + & x_3 \\
x_4 & = & 2 & - & 2x_2 & + & x_3 \\
x_5 & = & 5 & - & 3x_2 & + & x_3 \\
 & & \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0}
\end{array}
$$

Hier kann man prinzipiell schon sehen, dass das Problem unbeschränkt ist. Dies ist an der NBV x_3 bereits abzulesen, weil hier alle Koeffizienten in den Restriktionen für x_3 positiv ist.

$$
\begin{array}{lcrclcl}
\max z & = & 5 & + & 2x_3 & - & x_4 \\
x_1 & = & 2 & + & 1/2\,x_3 & + & 1/2\,x_4 \\
x_2 & = & 1 & + & 1/2\,x_3 & - & 1/2\,x_4 \\
x_5 & = & 2 & - & 1/2\,x_3 & + & 3/2\,x_4 \\
 & & \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcrclcl}
\max z & = & 13 & + & 5x_4 & - & 4x_5 \\
x_1 & = & 4 & + & 2x_4 & - & x_5 \\
x_2 & = & 3 & + & x_4 & - & x_5 \\
x_3 & = & 4 & + & 3x_4 & - & 2x_5 \\
 & & \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0}
\end{array}
$$

Das Problem ist unbeschränkt, denn x_4 kann beliebig groß werden, ohne dass eine gegebene Restriktion ihre Zulässigkeit verliert.

4) max

$-x_1 \quad +x_2$

$-x_1 \quad +x_2 \quad \leq 5$

$x_1 \quad -2x_2 \quad \leq 9$

$0 \leq x_1 \leq 6$

$0 \leq x_2 \leq 8$

äquivalentes LP in Gleichungsform

max z	=	0	−	x_1	+	$\boxed{x_2}$
x_3	=	5	+	x_1	−	$\boxed{x_2}$
x_4	=	9	−	x_1	+	$\boxed{2x_2}$

$0 \leq x_1 \leq 6$

$0 \leq x_2 \leq 8$

$x_3, x_4 \quad \geq 0$

zulässige Basislösung: $x_1, x_2 = 0,\ x_3 = 5,\ x_4 = 9$ mit z = 0

$x_2 = 0 + t \quad x_2 \leq 8 \quad t \leq 8$

$x_3 = 5 - t \quad x_3 \geq 0 \quad t \leq 5$ min!!!

$x_4 = 9 + 2t \quad x_4 \geq 0 \quad t \leq \infty$

max z	=	5			−	x_3
x_2	=	5	+	x_1	−	x_3
x_4	=	19	+	x_1	−	$2x_3$

$0 \leq x_1 \leq 6$

$0 \leq x_2 \leq 8$

$x_3, x_4 \quad \geq 0$

Keine weitere Verbesserung mehr möglich, weil alle Koeffizienten der ZF negativ sind.
Optimale Lösung des LP-Problems lautet: $x_1 = x_3 = 0,\ x_2 = 5,\ x_4 = 19$ mit z = 5

Aufgabe 2)

Gegeben ist die externe Modellrepräsentation (EMR) mit

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
 & & 6x_1 & - & x_2 & & \\
1 & \leq & -x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\
2 & \leq & -3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 10 \\
-2 & \leq & +2x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \\
 & & & - & 2 & \leq & x_1 \\
 & & 0 & \leq & x_2 & \leq & 6
\end{array}
$$

Maximiere $\tilde{c}\tilde{x}$

u. d. N. $L \leq \tilde{A}\tilde{x} \leq U$

$\tilde{l} \leq \tilde{x} \leq \tilde{u}$

$$
\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \tilde{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \tilde{l} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{u} = \begin{pmatrix} \infty \\ 6 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Standardisierte Umwandlung in Gleichungsform

$$A=\left[\tilde{A}\,|\,I\right]=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ -3 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ c=\begin{bmatrix}\tilde{c}\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ -1\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\ l=\begin{bmatrix}\tilde{l}\\ -U\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\ 0\\ -5\\ -10\\ 0\end{bmatrix},\ u=\begin{bmatrix}\tilde{u}\\ -L\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\infty\\ 6\\ -1\\ -2\\ 2\end{bmatrix},\ x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{bmatrix}$$

$b=0$

Interne Modellrepräsentation (IMR)

Maximiere $\left[\tilde{c}\,|\,0\right]\begin{bmatrix}x_S\\ x_L\end{bmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix}6 & -1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{pmatrix}$

s. t. $\left[\tilde{A}\,|\,I\right]\begin{bmatrix}x_S\\ x_L\end{bmatrix}=0$ $\qquad \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ -3 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{pmatrix}=b$

$\begin{bmatrix}\tilde{l}\\ -U\end{bmatrix}\le\begin{bmatrix}x_S\\ x_L\end{bmatrix}\le\begin{bmatrix}\tilde{u}\\ -L\end{bmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix}-2\\ 0\\ -5\\ -10\\ 0\end{pmatrix}\le\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{pmatrix}\le\begin{pmatrix}\infty\\ 6\\ -1\\ -2\\ 2\end{pmatrix}$

Problem in Gleichungsform

$$\begin{aligned}\max z &= 6x_1 - x_2\\ x_3 &= x_1 - x_2\\ x_4 &= 3x_1 - 2x_2\\ x_5 &= -2x_1 + x_2\end{aligned}$$

NBV werden an ihre Schranken gesetzt, bei zweiseitig beschränkten Variablen wird diejenige gewählt, die den besseren ZF-Wert für das Originalproblem (Max) liefert, also $x_1=-2$ (hier nur eine Schranke) und $x_2=0$ (hier liefert die untere Schranke wegen „–“ den besseren ZF-Wert)

Zulässigkeit der Schlupfbasis überprüfen

$x_3=-2-0=-2$	$-5\le x_3\le -1$	*zulässig*
$x_4=3*-2-2*-0=-6$	$-10\le x_4\le -2$	*zulässig*
$x_5=-2*-2+0=4$	$0\le x_5\le 2$	*unzulässig*

Hilfsproblem formulieren (wegen einer Unzulässigkeit in der Schlupfbasis)

$$\min \sum_{i=1}^{m} w_{n+i} x_{n+i}$$

$$u.d.N. \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \qquad (i = 1, 2, .., m)$$

$$l_j \le x_j \le u_j \qquad (j = 1, 2, .., n+m)$$

Wenn am Ende der Phase 1 alle $x_{n+i} = 0$, dann gibt es eine gültige Lösung für das Originalproblem, sonst nicht.

$$\begin{array}{lcrcrcrcrcrcr}
\textit{min } z = & & & & & & & & w_6 x_6 & + & w_7 x_7 & + & w_8 x_8 \\
0 & = - & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_6 & & & & \\
0 & = - & 3x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & + & x_7 & & \\
0 & = & 2x_1 & - & x_2 & & & & & + & x_5 & + & x_8
\end{array}$$

Hier werden künstliche Variable eingeführt. (minimiere die Summe der Unzulässigkeiten)

NBV werden an ihre Schranken gesetzt

$x_1 = -2,\ x_2 = 0,\ x_3 = -5,\ x_4 = -10,\ x_5 = 0$

$$\boxed{\min \sum_{i=1}^{m} w_{n+i} x_{n+i} \quad \triangleq \quad \max \sum_{i=1}^{m} (-w_{n+i}) x_{n+i}}$$

Für die Werte der Basisvariablen gilt:

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad (i = 1, .., m) \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} \textit{falls } x_{n+i} \ge 0: \ w_{n+i} = 1, \quad l_{n+i} = 0, \quad u_{n+i} = \infty \\ \textit{falls } x_{n+i} < 0: \ w_{n+i} = -1, \ l_{n+i} = -\infty, \ u_{n+i} = 0 \end{array}$$

$$x_6 = 0 - (-x_1 + x_2 + x_3) = 0 - (-3) = 3 \qquad \Rightarrow w_6 = 1,\ l_6 = 0,\ u_6 = \infty$$

$$x_7 = 0 - (-3x_1 + 2x_2 + x_4) = 0 - (-4) = 4 \qquad \Rightarrow w_7 = 1,\ l_7 = 0,\ u_7 = \infty$$

$$x_8 = 0 - (2x_1 - x_2 + x_5) = 0 - (-4) = 4 \qquad \Rightarrow w_8 = 1,\ l_8 = 0,\ u_8 = \infty$$

$$\begin{array}{lcrcrcrcrcrcr}
\textit{max } z = & & & & & & & - & x_6 & - & x_7 & - & x_8 \\
0 & = - & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_6 & & & & \\
0 & = - & 3x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & + & x_7 & & \\
0 & = & 2x_1 & - & x_2 & & & & & + & x_5 & + & x_8
\end{array}$$

Hilfsproblem IMR

$$c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix},\ l = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -5 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ u = \begin{pmatrix} \infty \\ 6 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Iteration 1

$x_1 = -2,\ x_2 = 0,\ x_3 = -5,\ x_4 = -10,\ x_5 = 0,\ x_6 = 3,\ x_7 = 4,\ x_8 = 4$

B={6,7,8} N={1,2,3,4,5}

Pricing

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_N = c_N - yA_N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Menge der Variablen, die als Pivotspalte in Frage kommen

$$H = \left\{ j \mid j \in N, \left(x_j = l_j \wedge \bar{c}_j > 0 \right) \vee \left(x_j = u_j \wedge \bar{c}_j < 0 \right) \right\} = \{2,3,4,5\}$$

wählen $q = 2$, weil x_2 den größten Koeffizienten der Zielfunktion (Max) hat
da $x_2^* = l_2$ ~> $t \geq 0$

„kleinstes t“-Suche

$t \leq u_q - l_q \quad \rightarrow \quad t \leq 6 - 0 = 6$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} d = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$F^+ = \left\{ i \mid i \in \{1,..,m\}, \left(l_{B(i)} > -\infty \wedge d_i > 0 \right) \vee \left(u_{B(i)} < \infty \wedge d_i < 0 \right) \right\} = \{1,2\}$$

$$t = \min\left\{ \min_{\substack{i \in F^+ \\ d_i > 0}} \left\{ \frac{x_{B(i)} - l_{B(i)}}{d_i} \right\}, \min_{\substack{i \in F^+ \\ d_i < 0}} \left\{ \frac{x_{B(i)} - u_{B(i)}}{d_i} \right\}, u_q - l_q \right\} = \left\{ \frac{3}{1}, \frac{4}{2}, 6 \right\} = 2$$

$r = i = 2, \quad p = B(r) = B(2) = 7$

Basislösung-Update

$x_B^* \leftarrow x_B^* - td \qquad x_6(t) = 1,\ x_7(t) = 0,\ x_8(t) = 6 \qquad x_q(t) = x_q^* + t \qquad x_2(t) = 2$

Basisupdate

$B \leftarrow (6,2,8) \qquad N \leftarrow (1,7,3,4,5)$

Iteration 2

$x_1 = -2,\ x_2 = 2,\ x_3 = -5,\ x_4 = -10,\ x_5 = 0,\ x_6 = 1,\ x_7 = 0,\ x_8 = 6$
B={6,2,8} N={1,7,3,4,5}

Pricing

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Menge der Variablen, die als Pivotspalte in Frage kommen

$$H = \left\{ j \mid j \in N, \left(x_j = l_j \wedge \bar{c}_j > 0 \right) \vee \left(x_j = u_j \wedge \bar{c}_j < 0 \right) \right\} = \{1,3,5\}$$

wählen $q = 1$, weil x_1 den größten Koeffizienten der Zielfunktion hat
da $x_1^* = l_1$ ~> $t \geq 0$

„kleinstes t"-Suche

$$t \leq u_q - l_q \quad \rightarrow \quad t \leq \infty - (-2) = \infty$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} d = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad d = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$F^+ = \left\{ i \mid i \in \{1,..,m\}, \left(l_{B(i)} > -\infty \wedge d_i > 0 \right) \vee \left(u_{B(i)} < \infty \wedge d_i < 0 \right) \right\} = \{1,3\}$$

$$t = \min \left\{ \min_{\substack{i \in F^+ \\ d_i > 0}} \left\{ \frac{x_{B(i)} - l_{B(i)}}{d_i} \right\}, \min_{\substack{i \in F^+ \\ d_i < 0}} \left\{ \frac{x_{B(i)} - u_{B(i)}}{d_i} \right\}, u_q - l_q \right\} = \left\{ \frac{1}{1/2}, \frac{6}{1/2}, \infty \right\} = 2$$

$$r = i = 1, \quad p = B(r) = B(1) = 6$$

Basislösung-Update

$x_B^* \leftarrow x_B^* - td$ $\quad x_6(t) = 0,\ x_2(t) = 5,\ x_8(t) = 5$ $\quad x_q(t) = x_q^* + t$ $\quad x_1(t) = 0$

Basisupdate

$B \leftarrow (1,2,8) \qquad N \leftarrow (6,7,3,4,5)$

Iteration 3

$x_1 = 0,\ x_2 = 5,\ x_3 = -5,\ x_4 = -10,\ x_5 = 0,\ x_6 = 0,\ x_7 = 0,\ x_8 = 5$
B={1,2,8} N={6,7,3,4,5}

Pricing

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_N = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Menge der Variablen, die als Pivotspalte in Frage kommen

$$H = \left\{ j \mid j \in N, \left(x_j = l_j \wedge \bar{c}_j > 0 \right) \vee \left(x_j = u_j \wedge \bar{c}_j < 0 \right) \right\} = \{4,5\}$$

wählen $q = 4$, weil x_4 den größten Koeffizienten der Zielfunktion hat

da $x_4^* = l_4$ ~> $t \geq 0$

„kleinstes t"-Suche

$$t \leq u_q - l_q \quad \rightarrow \quad t \leq (-2) - (-10) = 8$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad d = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F^+ = \left\{ i \mid i \in \{1,..,m\}, \left(l_{B(i)} > -\infty \wedge d_i > 0 \right) \vee \left(u_{B(i)} < \infty \wedge d_i < 0 \right) \right\} = \{2,3\}$$

$$t = \min \left\{ \min_{\substack{i \in F^+ \\ d_i > 0}} \left\{ \frac{x_{B(i)} - l_{B(i)}}{d_i} \right\}, \min_{\substack{i \in F^+ \\ d_i < 0}} \left\{ \frac{x_{B(i)} - u_{B(i)}}{d_i} \right\}, u_q - l_q \right\} = \left\{ \frac{-1}{-1}, \frac{5}{1}, 8 \right\} = 1$$

$$r = i = 2, \quad p = B(r) = B(2) = 2$$

Basislösung-Update

$$x_B^* \leftarrow x_B^* - td \qquad x_1(t) = 1,\ x_2(t) = 6,\ x_8(t) = 4 \qquad x_q(t) = x_q^* + t \qquad x_4(t) = -9$$

Basisupdate

$$B \leftarrow (1,4,8) \qquad N \leftarrow (6,7,3,2,5)$$

Iteration 4

$$x_1 = 1,\ x_2 = 6,\ x_3 = -5,\ x_4 = -9,\ x_5 = 0,\ x_6 = 0,\ x_7 = 0,\ x_8 = 4$$

B={1,4,8} N={6,7,3,2,5}

Pricing

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_N = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Menge der Variablen, die als Pivotspalte in Frage kommen

$$H = \left\{ j \mid j \in N, \left(x_j = l_j \wedge \bar{c}_j > 0 \right) \vee \left(x_j = u_j \wedge \bar{c}_j < 0 \right) \right\} = \{1,3,5\}$$

wählen $q = 3$, weil x_3 den größten Koeffizienten der Zielfunktion hat da $x_3^* = l_3$ ~> $t \geq 0$

„kleinstes t"-Suche

$t \leq u_q - l_q \quad \rightarrow \quad t \leq (-1) - (-5) = 4$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad d = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$F^+ = \left\{ i \mid i \in \{1,..,m\}, \left(l_{B(i)} > -\infty \wedge d_i > 0\right) \vee \left(u_{B(i)} < \infty \wedge d_i < 0\right) \right\} = \{2,3\}$$

$$t = \min \left\{ \min_{\substack{i \in F^+ \\ d_i > 0}} \left\{ \frac{x_{B(i)} - l_{B(i)}}{d_i} \right\}, \min_{\substack{i \in F^+ \\ d_i < 0}} \left\{ \frac{x_{B(i)} - u_{B(i)}}{d_i} \right\}, u_q - l_q \right\} = \left\{ \frac{-7}{-3}, \frac{4}{2}, 4 \right\} = 2$$

$r = i = 3, \quad p = B(r) = B(3) = 8$

Basislösung-Update

$x_B^* \leftarrow x_B^* - td \qquad x_1(t) = 3,\ x_4(t) = -3,\ x_8(t) = 0 \qquad x_q(t) = x_q^* + t \qquad x_3(t) = -3$

Basisupdate

$B \leftarrow (1,4,3) \qquad N \leftarrow (6,7,8,2,5)$

Iteration 5

$x_1 = 3,\ x_2 = 6,\ x_3 = -3,\ x_4 = -3,\ x_5 = 0,\ x_6 = 0,\ x_7 = 0,\ x_8 = 0$

B={1,4,3} N={6,7,8,2,5}

Pricing

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \rightarrow \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_N = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Menge der Variablen, die als Pivotspalte in Frage kommen

$$H = \left\{ j \mid j \in N, \left(x_j = l_j \wedge \bar{c}_j > 0\right) \vee \left(x_j = u_j \wedge \bar{c}_j < 0\right) \right\} = \emptyset$$

Das Optimum des Hilfsproblems ist eine zulässige Basislösung für das Originalproblem

$x_1 = 3,\ x_2 = 6,\ x_3 = -3,\ x_4 = -3,\ x_5 = 0$

B={1,4,3} N={2,5}

Pricing

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \rightarrow \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_N = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Menge der Variablen, die als Pivotspalte in Frage kommen

$$H = \left\{ j \mid j \in N, \left(x_j = l_j \wedge \bar{c}_j > 0 \right) \vee \left(x_j = u_j \wedge \bar{c}_j < 0 \right) \right\} = \varnothing$$

Da $H = \varnothing$ ist x^* die optimale Basislösung mit
$x_1 = 3,\ x_2 = 6,\ x_3 = -3,\ x_4 = -3,\ x_5 = 0$ und $z = 3*6 + 6*(-1) = 12$

Der optimale Zielfunktionswert ergibt sich aus $x_1 = 3 \textit{ und } x_2 = 6$ mit $z = 12$

Aufgabe 3)

1)

Wenn wir eine degenerierte Basisvariable haben bedeutet dies, dass alle Basisvariablen als ausscheidende Variablen in Frage kommen.

$$Max: c_1x_1 + c_2x_2 ... + c_nx_n$$
$$x_{n+1} = b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 ... - a_{1n}x_n$$
$$x_{n+2} = b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 ... - a_{2n}x_n$$
...
$$x_{n+m} = b_n - a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 ... - a_{mn}x_n$$

Nehmen wir nun an, dass x_{n+1} die verlassende degenerierte Variable ist. Dann bedeutet das für das Dictionary:

$$t = \frac{b_1}{-a_{11}} = \frac{b_2}{-a_{21}} = ... = \frac{b_n}{-a_{m1}}$$

Die Schrittweite ist also gleich.

In dem Dictionary nach einer Simplexiteration ergibt sich also für die neuen b_i Werte der verbliebenen Basisvariablen

$$b_{i_{neu}} = b_i - ta_{i1}$$

mit $t = \frac{b_i}{-a_{i1}}$

$$b_{i_{neu}} = b_i - \frac{b_i}{-a_{i1}} * -a_{i1}$$

$$b_{i_{neu}} = b_i - \frac{b_i}{-a_{i1}} * -a_{i1}$$

$$b_{i_{neu}} = 0$$

Die Variable die nun in der nächsten Simplexiteration in die Basis eintritt, kann dadurch, dass die Basislösungen nun alle 0 sind und für $x_i \geq 0$ gilt, auch nur eine Schrittweite von $t = 0$ erreichen. Mit einer Schrittweite von 0 ist aber keine Zielwertverbesserung möglich.

➔ Aussage 1 ist richtig

2)
Das Problem allgemeiner Form

$$max \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$u.d.N \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$$

$$x_j \geq 0$$

wird als zulässige Basislösung notiert

Iteration 1)

$$max: z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

$$x_{n+1} = -a_{11} x_1 - a_{12} x_2 - \ldots - a_{1n} x_n \quad *$$

$$x_{n+2} = -a_{21} x_1 - a_{22} x_2 - \ldots - a_{2n} x_n$$

$$\ldots$$

$$x_{n+m} = -a_{m1} x_1 - a_{m2} x_2 - \ldots - a_{mn} x_n$$

Annahme: x_1 soll in die Basis eintreten x_{n+1} soll die Basis verlassen

Nebenrechnung:
* nach x_1 auflösen

$$x_{n+1} = -a_{11} x_1 - a_{12} x_2 - \ldots - a_{1n} x_n \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -\frac{a_{12} x_2}{a_{11}} - \ldots - \frac{a_{1n} x_n}{a_{11}} - \frac{x_{n+1}}{a_{11}}$$

Iteration 2)
(neue Zielfunktion)

$$\max \; z = (c_2 - \frac{c_1 a_{12}}{a_{11}}) x_2 + \ldots + (c_n - \frac{c_1 a_{1n}}{a_{11}}) x_n - (\frac{c_1}{a_{11}}) x_{n+1}$$

x_{n+1} hat in der Iteration die Basis verlassen. Um zu überprüfen ob sie wieder eintreten kann, reicht uns die Zielfunktion ohne die Nebenbedingungen, da nur der Koeffizient und x_{n+1} von Bedeutung ist:

$$-(\frac{c_1}{a_{11}}) x_{n+1}$$

Damit x_{n+1} nun wieder in die Basis eintreten kann muss der Koeffizient davor positiv sein.
Damit der Koeffizient positiv wird, muss der Ausdruck in der Klammer negativ werden, also der Bruch.
c_1 ist positiv da x_1 sonst nicht als verlassende Variable in Iteration 1 gewählt worden wäre.
Im Folgenden sind also noch 2 Fälle zu unterscheiden

<u>Fall 1:</u> $a_{11} < 0 \Rightarrow -(\frac{c_1}{a_{11}}) > 0$

Hier wird x_{n+1} nicht erneut in die Basis eintreten, da ja x_{n+1} an seiner oberen Schranke ist und der Koeffizient positiv ist. Somit ist hier keine Verbesserung des Zielwertes möglich.

<u>Fall 2:</u> $a_{11} > 0 \Rightarrow -(\frac{c_1}{a_{11}}) < 0$

Hier wird x_{n+1} nicht erneut in die Basis eintreten, da x_{n+1} an seiner unteren Schranke ist aber der Koeffizient negativ. Somit ist keine Verbesserung des Zielwertes möglich.

➔ Aussage 2 ist richtig

3)

Eine Variable, die in Iteration i in die Basis eintritt, kann die Basis in Iteration i+1 wohl wieder verlassen. Beweis durch Gegenbeispiel

max z	0	+	$8\,x_1$	+	$2\,x_2$
x_3	4	–	x_1	–	x_2
x_4	1	–	x_1	–	x_2

Hinweis: hier haben wir nicht den größten Koeffizienten aus der ZF genommen.

zulässige Basislösung: $x_1 = x_2 = 0,\ x_3 = 4,\ x_4 = 1$ mit z = 0

Pivotspalte: x_2 / Pivotzeile: x_4

max z	2	+	$6\,x_1$	–	$2\,x_4$
x_2	1	–	x_1	–	x_4
x_3	3	–	$2\,x_1$	–	x_4

zulässige Basislösung: $x_1 = x_4 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 3$ mit z = 2

Pivotspalte: x_1 / Pivotzeile: x_2