

Aufgabe 1)

Gegeben sei: $X = \{x \in \mathbb{R}_+, y \in \{0,1\} : 3y - 3x \leq 1\}$

$y = 0:$

$3y - 3x \leq 1$

$0 - 3x \leq 1$

$x \geq -1/3$

$x \geq 0$ (wg. $x \in \mathbb{R}_+$)

$y = 1:$

$3y - 3x \leq 1$

$3 - 3x \leq 1$

$x \geq 2/3$

Validität der Ungleichung überprüfen:

$y = 0:$

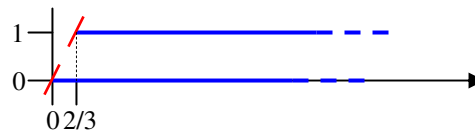
$0 - 3/2x \leq 0$

$x \geq 0$

$y = 1:$

$1 - 3/2x \leq 0$

$x \geq 2/3$



Sowohl für $y = 0$ als auch für $y = 1$ werden keine gültigen Lösungen des Originalproblems abgeschnitten. Daher ist diese Ungleichung valide.

Aufgabe 2)

Ausgangsmodell

Aufgabe 2	Auto	Fahrrad	Computer	CDs	Bücher	Geld	TYP	RHS
Min		3000	1200	1000	30	12	1	
LB		0	0	0	0	0	0	
UB		1000	1000	1000	1000	1000	1000	
TYP	INT	INT	INT	INT	INT	INT		
Spaß		100	57	69	5	7	0,1 >=	75
Gewicht		1000	20	53	0,5	3	0,1 <=	1000
Obergrenze					1	1	<=	10
Prestige		74	60	74	1	0,1	>=	75
Beschaffung		70	66	38	5,5		<=	75
Nicht mehr als 2		1	1	1			<=	2
Activity		0	0	1	1	0	10	1040,00

1) Bound Reduction

Bedingung 1)

$-\infty < L_i < bu_i < \infty$

$\underline{u}_j = \min\{l_j + (bu_i - L_i) / a_{ij}, u_j\}$ for $j \in P_i$

$\underline{l}_j = \max\{u_j + (bu_i - L_i) / a_{ij}, l_j\}$ for $j \in N_i$

Bedingung 2)

$-\infty < bl_i < U_i < \infty$

$\underline{u}_j = \min\{l_j + (bl_i - U_i) / a_{ij}, u_j\}$ for $j \in N_i$

$\underline{l}_j = \max\{u_j + (bl_i - U_i) / a_{ij}, l_j\}$ for $j \in P_i$

Bedingung 3)

If $\underline{l}_j > l_j$ or $\underline{u}_j < u_j$ bounds can be replaced; they can be rounded to $\lceil \underline{l}_j \rceil$ resp $\lfloor \underline{u}_j \rfloor$

Restriktion „Spaß“

$$L_1 = 0$$

$$U_1 = 100 \cdot 1000 + 57 \cdot 1000 + 69 \cdot 1000 + 5 \cdot 1000 + 7 \cdot 1000 + 0,1 \cdot 1000 = 238100$$

Bedingung 1) nicht relevant da $-\infty < 0 < \infty < \infty$ nicht gültig

Bedingung 2) $-\infty < 75 < 238100 < \infty$

\underline{u}_j nicht anwendbar da keine negativen Koeffizienten

$$\underline{l}_1 = \max \{ 1000 + (75 - 238100) / 100, 0 \} \rightarrow 0$$

$$\underline{l}_2 = \max \{ 1000 + (75 - 238100) / 57, 0 \} \rightarrow 0$$

$$\underline{l}_3 = \max \{ 1000 + (75 - 238100) / 69, 0 \} \rightarrow 0$$

$$\underline{l}_4 = \max \{ 1000 + (75 - 238100) / 5, 0 \} \rightarrow 0$$

$$\underline{l}_5 = \max \{ 1000 + (75 - 238100) / 7, 0 \} \rightarrow 0$$

$$\underline{l}_6 = \max \{ 1000 + (75 - 238100) / 0,1, 0 \} \rightarrow 0$$

Restriktion „Gewicht“

$$L_2 = 0$$

$$U_2 = 1000 \cdot 1000 + 20 \cdot 1000 + 53 \cdot 1000 + 0,5 \cdot 1000 + 3 \cdot 1000 + 0,1 \cdot 1000 = 1076000$$

Bedingung 1) $-\infty < 0 < 1000 < \infty$

$$\underline{u}_1 = \min \{ 0 + (1000 - 0) / 1000, 1000 \} \rightarrow 1$$

$$\underline{u}_2 = \min \{ 0 + (1000 - 0) / 20, 1000 \} \rightarrow 50$$

$$\underline{u}_3 = \min \{ 0 + (1000 - 0) / 53, 1000 \} \rightarrow 18 \frac{46}{53}$$

$$\underline{u}_4 = \min \{ 0 + (1000 - 0) / 0,5, 1000 \} \rightarrow 1000$$

$$\underline{u}_5 = \min \{ 0 + (1000 - 0) / 3, 1000 \} \rightarrow 333 \frac{1}{3}$$

$$\underline{u}_6 = \min \{ 0 + (1000 - 0) / 0,1, 1000 \} \rightarrow 1000$$

\underline{l}_j nicht anwendbar da keine negativen Koeffizienten

Bedingung 2) nicht relevant da $-\infty < -\infty < 1076000 < \infty$ nicht gültig

Restriktion „Obergrenze“

$$L_3 = 0$$

$$U_3 = 1 \cdot 1000 + 1 \cdot 1000 = 20$$

Bedingung 1) $-\infty < 0 < 10 < \infty$

$$\underline{u}_4 = \min \{ 0 + (10 - 0) / 1, 1000 \} \rightarrow 10$$

$$\underline{u}_5 = \min \{ 0 + (10 - 0) / 1, 333 \frac{1}{3} \} \rightarrow 10$$

\underline{l}_j nicht anwendbar da keine negativen Koeffizienten

Bedingung 2) nicht relevant da $-\infty < -\infty < 2000 < \infty$ nicht gültig

Restriktion „Prestige“

$$L_4 = 0$$

$$U_4 = 74 \cdot 1000 + 60 \cdot 1000 + 74 \cdot 1000 + 1 \cdot 1000 + 0,1 \cdot 1000 = 209100$$

Bedingung 1) nicht relevant da $-\infty < 0 < \infty < \infty$ nicht gültig

Bedingung 2) $-\infty < 75 < 209100 < \infty$

\underline{u}_j nicht anwendbar da keine negativen Koeffizienten

$$\underline{l}_1 = \max \{ 1000 + (75 - 209100) / 74, 0 \} \rightarrow 0$$

$$\underline{l}_2 = \max \{ 1000 + (75 - 209100) / 60, 0 \} \rightarrow 0$$

$$\underline{l}_3 = \max \{ 1000 + (75 - 209100) / 74, 0 \} \rightarrow 0$$

$$\underline{l}_4 = \max \{ 1000 + (75 - 209100) / 1, 0 \} \rightarrow 0$$

$$\underline{l}_5 = \max \{ 1000 + (75 - 209100) / 0,1, 0 \} \rightarrow 0$$

Restriktion „Beschaffung“

$$L_5 = 0$$

$$U_5 = 70 \cdot 1000 + 66 \cdot 1000 + 38 \cdot 1000 + 5,5 \cdot 1000 = 179500$$

Bedingung 1)

$$-\infty < 0 < 75 < \infty$$

$$\underline{u}_1 = \min \{ 0 + (75 - 0) / 70, 1 \} \rightarrow 1$$

$$\underline{u}_2 = \min \{ 0 + (75 - 0) / 66, 50 \} \rightarrow 25/22 \rightarrow 1 \text{ aufgrund Bedingung 3)}$$

$$\underline{u}_3 = \min \{ 0 + (75 - 0) / 38, 18 \} \rightarrow 17/38 \rightarrow 1 \text{ aufgrund Bedingung 3)}$$

$$\underline{u}_4 = \min \{ 0 + (75 - 0) / 5,5, 10 \} \rightarrow 10$$

\underline{l}_j nicht anwendbar da keine negativen Koeffizienten

Bedingung 2) nicht relevant da $-\infty < -\infty < 179500 < \infty$ nicht gültig

Restriktion „Nicht mehr als 2“

$$L_6 = 0$$

$$U_6 = 1 \cdot 1000 + 1 \cdot 1000 + 1 \cdot 1000 = 3000$$

Bedingung 1)

$$-\infty < 0 < 2 < \infty$$

$$\underline{u}_1 = \min \{ 0 + (2 - 0) / 1, 1 \} \rightarrow 1$$

$$\underline{u}_2 = \min \{ 0 + (2 - 0) / 1, 1 \} \rightarrow 1$$

$$\underline{u}_3 = \min \{ 0 + (2 - 0) / 1, 1 \} \rightarrow 1$$

\underline{l}_j nicht anwendbar da keine negativen Koeffizienten

Bedingung 2) nicht relevant da $-\infty < -\infty < 179500 < \infty$ nicht gültig

Modell nach Bound Reduction

Geschenkfrage	Auto	Fahrrad	Computer	CDs	Bücher	Geld	TYP	RHS
Min	3000	1200	1000	30	12	1		
LB	0	0	0	0	0	0		
UB	1	1	1	10	10	1000		
TYP	INT	INT	INT	INT	INT	INT		
Spaß	100	57	69	5	7	0,1	>=	75
Gewicht	1000	20	53	0,5	3	0,1	<=	1000
Obergrenze				1	1		<=	10
Prestige	74	60	74	1	0,1		>=	75
Beschaffung	70	66	38	5,5			<=	75
Nicht mehr als 2	1	1	1				<=	2

2) Probing

Wird nur durchgeführt bei den freien 0/1 Variablen

In diesem Modell: x_1, x_2, x_3

$x_1 = 1$

- ⇒ $x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$ aufgrund Restriktion „Gewicht“
- ⇒ Restriktion „Prestige“ nicht mehr erfüllbar
- ⇒ IP infeasible
- ⇒ $x_1 = 0$ fixieren, Spalte entfernen

$x_2 = 1$

- ⇒ $x_3 = 0$ Restriktion „Beschaffung“
- ⇒ Restriktion „Prestige“ nicht mehr erfüllbar, da sich mit Upperbounds von CD und Bücher 71 ergibt und $71 \leq 75$
- ⇒ IP infeasible
- ⇒ $x_2 = 0$ fixieren, Spalte entfernen

$x_3 = 1$

- ⇒ erfüllbar

$x_3 = 0$

- ⇒ Restriktion „Prestige“ nicht mehr erfüllbar, da sich mit Upperbounds von CD und Bücher 9 ergibt und $9 \leq 75$
- ⇒ IP infeasible
- ⇒ $x_3 = 1$ fixieren, Budget anpassen
- ⇒ letzte Restriktion „Nicht mehr als 2“ entfällt

Modell nach Probing

Geschenkfrage	Computer	CDs	Bücher	Geld	TYP	RHS
Min	1000	30	12	1		
LB	1	0	0	0		
UB	1	10	10	1000		
TYP	INT	INT	INT	INT		
Spaß		5	7	0,1	>=	6
Gewicht		0,5	3	0,1	<=	947
Obergrenze		1	1		<=	10
Prestige		1	0,1		>=	1
Beschaffung		5,5			<=	37

3) Coefficient Reduction

Restriktion Spaß

$$5x_4 + 7x_5 + 0,1x_6 \geq 6$$

betrachte x_4

$$L_4 = 0 \text{ und } L_4 > b_4 - a_{14} = 1$$

$$\text{dann } a_{14}' = b_4 + L_4 = 6$$

betrachte x_5

$$L_5 = 0 \text{ und } L_5 > b_5 - a_{15} = -1$$

betrachte x_6

$$L_6 = 0 \text{ und } L_6 > b_6 - a_{16} = 5,9$$

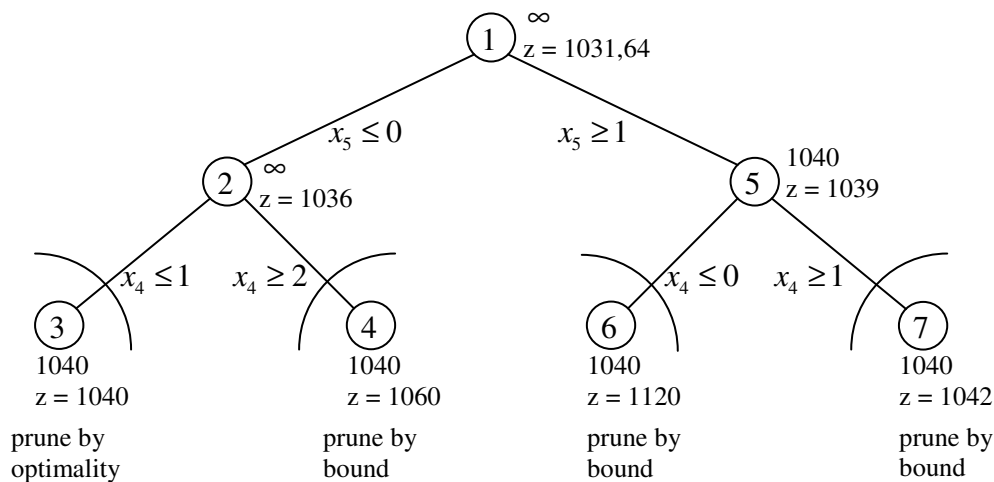
die neue Restriktion würde dann lauten $5x_4 + 6x_5 + 0,1x_6 \geq 6$

Bei den anderen Restriktion würde nach dem gleichen Prinzip verfahren. Man kann aber bereits durch hinsehen erkennen dass es zu keiner weiteren Coefficient Reduction kommt.

Modell nach Coefficient Reduction

	Computer	CDs	Bücher	Geld	TYP	RHS
Min	1000	30	12	1		
LB	1	0	0	0		
UB	1	10	10	1000		
TYP	INT	INT	INT	INT		
Spaß		5	6	0,1	\geq	6
Gewicht		0,5	3	0,1	\leq	947
Obergrenze		1	1		\leq	10
Prestige		1	0,1		\geq	1
Beschaffung		5,5			\leq	37

Branch and Bound



Die optimale Lösung ist 1040 mit $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 0, x_6 = 10$

Aufgabe 3)

Seien zur Vereinfachung

$x_1 = \text{Reise}$, $x_2 = \text{Halskette}$, $x_3 = \text{Ohrring}$, $x_4 = \text{Ring}$, $x_5 = \text{CD}$, $x_6 = \text{Buch}$

Geschenkfrage2	Reise	Halskette	Ohrring	Ring	CD	Buch	TYP	RHS
Min	1027	997	199	69	17,99	24,99		
LB	0	0	0	0	0	0		
UB	1	1	1	1	1	1		
TYP	CON	CON	CON	CON	CON	CON		
Symbolgehalt			1	1	1		\geq	2
Eindruck schinden	1					1	\geq	1
Eigennutz	1						\geq	1
Nicht Buch und CD						1	\leq	1
Wenn Ring dann...			1		-1		\geq	0
Budget	1027	997	199	69	17,99	24,99	\leq	1066
Activity	0,00	0,50	1,00	0,50	0,00	1,00		756,99

1) LP Relaxation lösen; durch Solver ergibt sich: $z = 756,99$ mit

$x_1 = 0$, $x_2 = 0.5$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0.5$, $x_5 = 0$, $x_6 = 1$

2) Probing (Degree 2 Test)

Aufgrund der LP Relaxation wird deutlich das es reicht probing mit x_2 und x_4 durchzuführen.

$x_2 = 0$

$\Rightarrow x_3, x_4 = 1$ aufgrund der Restriktion „Symbolgehalt“

\Rightarrow „Wenn Ring dann...“ nicht erfüllt da $-1 \not\geq 0$

\Rightarrow IP infeasible

$x_2 = 1$

$\Rightarrow x_4 = 1$ oder aufgrund der Restriktion „Symbolgehalt“ ($x_3 = 0$ da Budget sonst 1196, und $1196 \not\leq 1066$)

\Rightarrow wenn $x_4 = 1$ dann Budget genau bei 1066 und kein weiteres Geschenk mehr möglich

\Rightarrow Restriktion „Eindruck schinden“ nicht mehr erfüllbar da weder Geld für $x_1 = \text{Reise}$, $x_5 = \text{CD}$ noch $x_6 = \text{Buch}$ da ist.

\Rightarrow IP infeasible

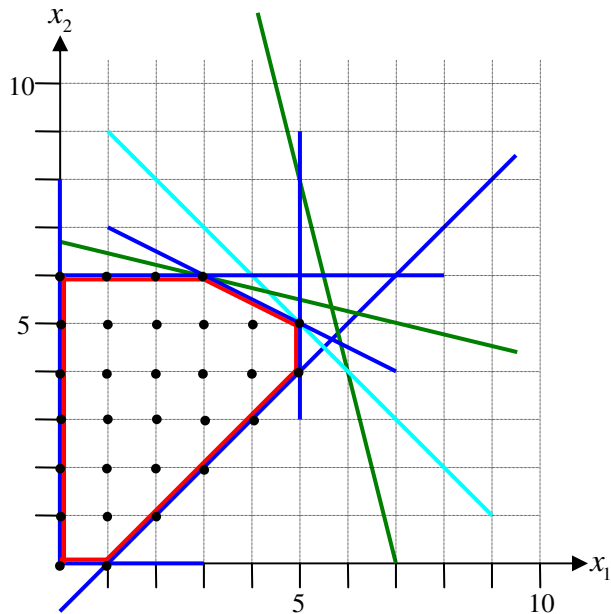
x_4 braucht nun nicht mehr betrachtet zu werden, da bereits ersichtlich wurde das x_2 weder den Wert 1 noch den Wert 0 im IP annehmen kann und damit ist das IP infeasible!

Aufgabe 4)

Gegeben ist $S = \{x \in \mathbb{Z}_+^2 : 4x_1 + x_2 \leq 28, x_1 + 4x_2 \leq 27, x_1 - x_2 \leq 1\}$

Die drei Ungleichungen der Chvátal-Gomory Prozedur (Vorlesung 8, Folie 4):

$$1) \sum_{j=1}^n ua_j x_j \leq ub \quad 2) \sum_{j=1}^n \lfloor ua_j \rfloor x_j \leq ub \quad 3) \sum_{j=1}^n \lfloor ua_j \rfloor x_j \leq \lfloor ub \rfloor \text{ mit } u \in \mathbb{R}_+^m$$



für $x_1 - x_2 \leq 1$:

$$(0 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \leq (0 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} 28 \\ 27 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 - x_2 \leq 1$$

für $x_1 \geq 0$:

$$(0 \ 0 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \leq (0 \ 0 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} 28 \\ 27 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 \geq 0$$

für $x_2 \geq 0$:

$$(0 \ 0 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \leq (0 \ 0 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} 28 \\ 27 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 \geq 0$$

für $x_1 \leq 5$:

$$(1/5 \ 0 \ 1/5) \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \leq (1/5 \ 0 \ 1/5) \begin{pmatrix} 28 \\ 27 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 \leq \lfloor 29/5 \rfloor \Rightarrow x_1 \leq 5$$

für $x_2 \leq 6$:

$$(0 \ 1/4 \ 0) \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \leq (0 \ 1/4 \ 0) \begin{pmatrix} 28 \\ 27 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 \leq \lfloor 24/4 \rfloor \Rightarrow x_2 \leq 6$$

für $x_1 + x_2 \leq 10$: *

$$(0 \quad 1/20 \quad 0 \quad 19/20 \quad 4/5) \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \leq (0 \quad 1/20 \quad 0 \quad 19/20 \quad 4/5) \begin{pmatrix} 28 \\ 27 \\ 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 \leq \lfloor 109/10 \rfloor \Rightarrow x_1 + x_2 \leq 10$$

für $x_1 + 2x_2 \leq 15$: *

$$(0 \quad 1/10 \quad 0 \quad 0 \quad 7/10 \quad 9/10) \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \leq (0 \quad 1/10 \quad 0 \quad 0 \quad 7/10 \quad 9/10) \begin{pmatrix} 28 \\ 27 \\ 1 \\ 5 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 + 2x_2 \leq \lfloor 153/10 \rfloor \Rightarrow x_1 + 2x_2 \leq 15$$

* Berechnung von u siehe unten

ClipMOPS-Lösung zur Berechnung von u:

Aufgabe 4	u1	u2	u3	u4	u5	TYP	RHS
Max		1	1	1	1	1	
LB							
UB	INF	INF	INF	INF	INF		
TYP	CON	CON	CON	CON	CON		
x1 (LB)		4	1	1	1	0 >=	1
x1 (UB)		4	1	1	1	0 <=	1,9
x2 (LB)		1	4	-1	0	1 >=	1
x2 (UB)		1	4	-1	0	1 <=	1,9
b (LB)		28	27	1	5	6 >=	10
b (UB)		28	27	1	5	6 <=	10,9
Activity	0,00	0,05	0,00	0,95	0,80		1,80

Aufgabe 4	u1	u2	u3	u4	u5	u6	TYP	RHS
Max		1	1	1	1	1	1	
LB								
UB	INF	INF	INF	INF	INF	INF		
TYP	CON	CON	CON	CON	CON	CON		
x1 (LB)		4	1	1	1	0	1 >=	1
x1 (UB)		4	1	1	1	0	1 <=	1,9
x2 (LB)		1	4	-1	0	1	1 >=	2
x2 (UB)		1	4	-1	0	1	1 <=	2,9
b (LB)		28	27	1	5	6	10 >=	15
b (UB)		28	27	1	5	6	10 <=	15,9
Activity	0,00	0,10	0,00	0,00	0,70	0,90		1,70