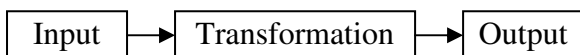


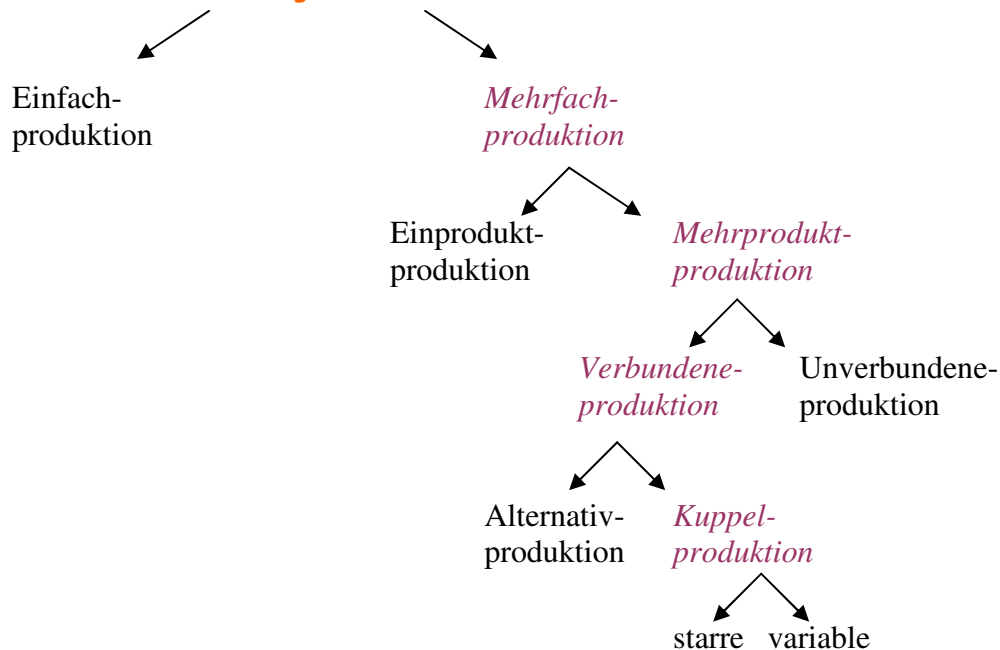
Produktionssysteme als Input- Output-Systeme



Man unterscheidet:

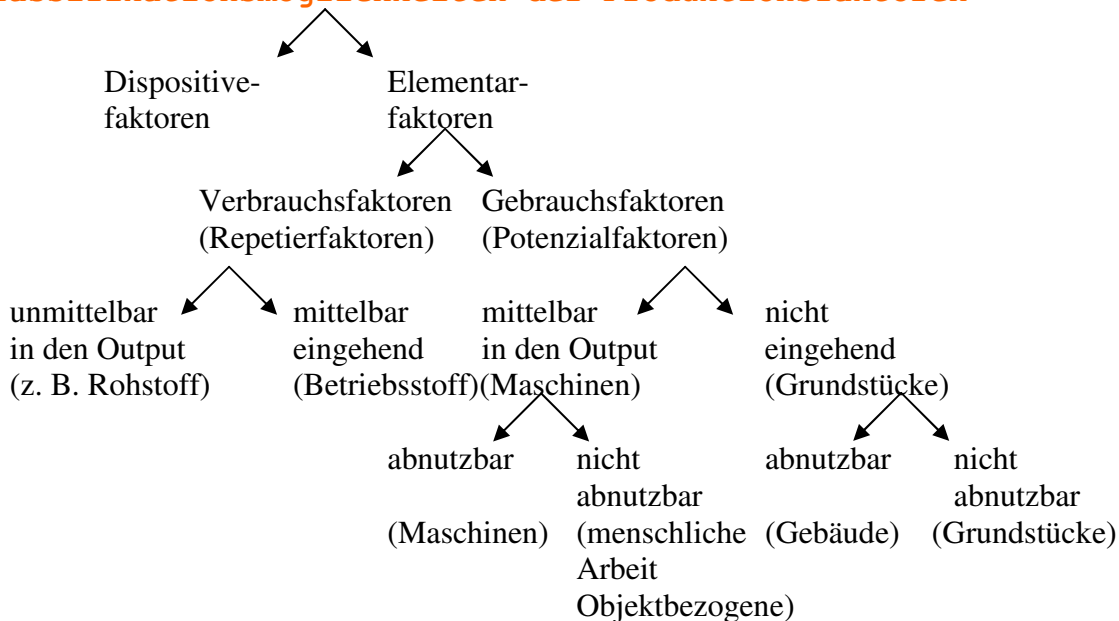
- a) Zustandstransformation z. B. Produktion
 - b) Zeittransformation z. B. Lagerung
 - c) Raumtransformation z. B. Transport
- ← Logistik

Klassifikationsmöglichkeiten der Produktion



Hiermit ist der Transformationsprozess „Produktion“ klassifiziert. Die Inputs heißen hier „Produktionsfaktoren“, die Outputs „Produkte“.

Klassifikationsmöglichkeiten der Produktionsfaktoren



Unterschiedliche Faktorarten werden im Produktionsprozess in unterschiedlichen Mengen eingesetzt. Diese Einsatzmengen werden in einem so genannten „Faktoreinsatzmengenvektor“ aufgelistet:

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_M \end{pmatrix} \text{ mit } r_m : \text{ von der Faktorart } m \text{ eingesetzte Menge in}$$

[FE – Faktoreinheit] [PZE – Planungseinheit]

Dabei gilt: $m=1(1)M$, d. h. $1,2,3,\dots,M$

Beispiel:

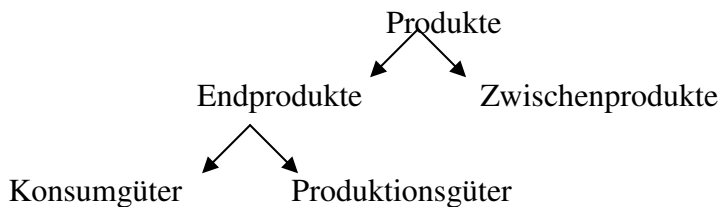
Tischproduktion mit $M=3$

($m=1$: Tischplatten; $m=2$: Tischbeine; $M=3$: Leim)

Hergestellt werden sollen pro Tag 100 Tische; dann könnte der Vektor \underline{r} wie folgt aussehen:

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} r_1 = 100 \text{ Tischplatten/Tag} \\ r_2 = 400 \text{ Tischbeine/Tag} \\ r_3 = 10 \text{ Liter/Tag} \end{pmatrix}$$

Hinsichtlich des Outputs ist ebenfalls eine Klassifikation möglich



Die verschiedenen Produktarten werden in unterschiedlichen Mengen ausgebracht. Diese kommen in so genannten „Produktionsmengenvektor“ zum Ausdruck.

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \text{ mit } x_n : \text{ von der Produktart } n \text{ ausgebrachte Menge in [PE - Produkteinheit]/[PZE]}$$

mit $n=1(1)N$

Beispiel: Tischproduktion, $N=4$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 20 \text{ Tische/Tag, Höhe 65cm} \\ 30 \text{ Tische/Tag, Höhe 70cm} \\ 35 \text{ Tische/Tag, Höhe 75cm} \\ 15 \text{ Tische/Tag, Höhe 80cm} \end{pmatrix}$$

Im Rahmen der Produktionsplanung werden Input- und Outputvektor (\underline{r} und \underline{x}) zusammengeführt, und zwar zu einem „Produktionspunkt“ \underline{y} :

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} -\underline{r} \\ +\underline{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_1 \\ \vdots \\ -r_M \\ +x_1 \\ \vdots \\ +x_N \end{pmatrix} \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} -100 \text{ Tischplatten/Tag} \\ -200 \text{ Tischbeine/Tag, 70cm} \\ -200 \text{ Tischbeine/Tag, 80cm} \\ -10 \text{ Liter Leim/Tag} \\ +50 \text{ Tische/Tag, 70cm} \\ +50 \text{ Tische/Tag, 80cm} \end{pmatrix}$$

Nicht alle Produktionspunkte sind technisch realisierbar.

Beispiel: PKW-Herstellung

$$\underline{y}_1 = \begin{pmatrix} -\dots \\ -\dots \\ -400 \text{ Reifen} \\ +\dots \\ +100 \text{ PKW} \end{pmatrix}$$

ist technisch realisierbar

$$\underline{y}_2 = \begin{pmatrix} -\dots \\ -\dots \\ -800 \text{ Reifen} \\ +\dots \\ +200 \text{ PKW} \end{pmatrix}$$

ist technisch realisierbar

$$\underline{y}_3 = \begin{pmatrix} -\dots \\ -\dots \\ -402 \text{ Reifen} \\ +\dots \\ +100,5 \text{ PKW} \end{pmatrix}$$

ist technisch nicht realisierbar

Technologien

Die Menge aller technisch realisierbaren Produktionspunkte wird als Technologie (menge) TM bezeichnet. Eine Teilmenge von TM, die Produktionspunkte mit ganz bestimmten Eigenschaften umfasst, heißt Produktionsprozess. Zu einer Technologiemenge bzw. einen Produktionsprozess gehören Produktionspunkte unterschiedlicher Qualität.

Effizienzkriterium zur Unterscheidung zwischen effizienten und nicht effizienten Produktionspunkten

(1) Input-Effizienz

Beispiel:

$$\underline{y}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -3 \\ +x^0 \end{pmatrix} \quad \underline{y}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -4 \\ +x^0 \end{pmatrix} \quad \underline{y}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \\ +x^0 \end{pmatrix} \quad \underline{y}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \\ +x^0 \end{pmatrix}$$

\underline{y}_1 ist nicht input-effizient, \underline{y}_2 ist nicht input-effizient,

Beide Punkte werden von \underline{y}_4 dominiert. \underline{y}_3 und \underline{y}_4 sind beide input-effizient.

Definition:

(1) Input-effiziente Produktionspunkte unterscheiden sich von input-ineffizienten dadurch, dass letztere im Vergleich zu ersteren bei gegebenem Output für mindestens eine Faktorart einen höheren Input und für alle übrigen Faktorarten keinen niedrigeren Input erfordern.

(2) Output-Effizienz

Beispiel:

$$\underline{y}_1 = \begin{pmatrix} -r^0 \\ +5 \\ +7 \\ +3 \end{pmatrix}, \quad \underline{y}_2 = \begin{pmatrix} -r^0 \\ +6 \\ +4 \\ +2 \end{pmatrix}, \quad \underline{y}_3 = \begin{pmatrix} -r^0 \\ +4 \\ +6 \\ +2 \end{pmatrix}, \quad \underline{y}_4 = \begin{pmatrix} -r^0 \\ +7 \\ +5 \\ +3 \end{pmatrix}$$

\underline{y}_3 wird dominiert von \underline{y}_1 , \underline{y}_2 wird dominiert von \underline{y}_4

Ergebnis: \underline{y}_1 und \underline{y}_4 sind Output-effizient

Definition:

Output-effiziente Produktionspunkte unterscheiden sich von Output-ineffizienten Produktionspunkten dadurch, dass letztere im Vergleich zu ersteren bei gegebenem Input für mindestens eine Produktart einen geringeren und für alle übrigen Produktarten keinen höheren Output liefern.

(3) Effizienz

Beispiel:

$$\underline{y}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -5 \\ +4 \\ +3 \end{pmatrix}, \quad \underline{y}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -4 \\ +3 \\ +3 \end{pmatrix}, \quad \underline{y}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -5 \\ +4 \\ +2 \end{pmatrix}, \quad \underline{y}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -4 \\ +4 \\ +3 \end{pmatrix}$$

\underline{y}_3 wird dominiert von \underline{y}_1 , \underline{y}_1 wird dominiert von \underline{y}_4

Ergebnis: \underline{y}_2 und \underline{y}_4 sind effizient

Definition:

Effiziente Produktionspunkte unterscheiden sich von ineffizienten Produktionspunkten dadurch, dass letztere im Vergleich zu ersteren höhere Inputs bei gleichen oder niedrigen Outputs und/oder geringere Outputs bei gleichen oder höheren Inputs aufweisen.

Alte Klausuraufgabe:

Gegeben sind 5 Produktionspunkte:

$$\underline{y}_1 = \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ +3 \\ +4 \end{pmatrix}, \quad \underline{y}_2 = \begin{pmatrix} -10 \\ -30 \\ +2 \\ +1 \end{pmatrix}, \quad \underline{y}_3 = \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ +3 \\ +2 \end{pmatrix}, \quad \underline{y}_4 = \begin{pmatrix} -20 \\ -30 \\ +3 \\ +4 \end{pmatrix}, \quad \underline{y}_5 = \begin{pmatrix} -20 \\ -10 \\ +4 \\ +3 \end{pmatrix}$$

Welcher/Welche Produktionspunkt(e) ist/sind effizient?

\underline{y}_2 wird dominiert von \underline{y}_1 , \underline{y}_3 wird dominiert von \underline{y}_1 , \underline{y}_4 wird dominiert von \underline{y}_1

Ergebnis: Effizient sind die Produktionspunkte \underline{y}_1 und \underline{y}_5 sind Output-effizient

3. Bewertung von Inputs und Outputs

Ausgangsproblem:

Rein mengenmäßig kann oft entschieden werden, welcher Produktionspunkt alle anderen dominiert.

Es ist eine Bewertung von Inputs und Outputs erforderlich!

(1) Bewertung der Inputs

r_m : Einsatzmenge von Produktionsfaktorart m, in [FE]/[PZE] (Faktoreinheiten / Planungszeiteinheit)
mit $m=1(1)M$

q_m : Einsatzpreis für die Produktionsfaktorart m, in [GE / FE] (Geldeinheiten /)

Die bewerteten Einsatzmengen (=Verbräuche) aller M Faktorarten ergeben in der Summe die Kosten:

$$K = \sum_{m=1}^M q_m * r_m \quad q_m = \frac{[GE]}{[FE]} * r_m = \frac{[FE]}{[PZE]} = \frac{[GE]}{[PZE]}$$

Ziel:

Ermittlung derjenigen Inputmengen, die einen gegebenen Output zu minimalen Kosten erzeugen

Beispiel: M=4

$$\underline{y}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -3 \\ -5 \\ +x_0 \end{pmatrix}, \quad \underline{y}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \\ -6 \\ +x_0 \end{pmatrix}, \quad \underline{y}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -4 \\ -4 \\ +x_0 \end{pmatrix} \quad q_1 = 10, \quad q_2 = 30, \quad q_3 = 40, \quad q_4 = 20$$

Kosten der drei Produktionspunkte:

K1: $10*2+30*4+40*3+20*5=360$ K2: 300 K3: 330 Kostenminimal ist \underline{y}_2

(2) Bewertung der Outputs

x_n : Ausbringungsmenge von Produktart n, in [PE = Produkteinheiten] / [PZE], in $n = 1(1)N$

p_n : Stückerlös von Produktart n, in [GE] / [PE] mit $n = 1(1)N$

In der Summe über alle N Produktarten ergeben die mit Preisen bewerteten Outputmengen, die sog.

$$\text{Erlöse: } E = \sum_{n=1}^N x_n * p_n \quad p_n = [GE] / [PE] \quad x_n = [PE] / [PZE]$$

Ziel:

Ermittlung derjenigen Outputmengen, die bei gegebenem Input die Erlöse maximieren.

Beispiel: N = 3

$$\underline{y}_1 = \begin{pmatrix} -r_0 \\ +3 \\ +5 \\ +4 \end{pmatrix}, \quad \underline{y}_2 = \begin{pmatrix} -r_0 \\ -4 \\ +6 \\ +3 \end{pmatrix}, \quad \underline{y}_3 = \begin{pmatrix} -r_0 \\ -3 \\ +4 \\ +4 \end{pmatrix}, \quad \underline{y}_4 = \begin{pmatrix} -r_0 \\ -4 \\ +6 \\ +4 \end{pmatrix}$$

Die Produktionspunkte $\underline{y}_1, \underline{y}_2$ und \underline{y}_3 werden dominiert. (von \underline{y}_4).

\underline{y}_4 ist allein Output-Effizient. Von allen vier Produktionspunkten ist \underline{y}_4 zu wählen!

Eine Bewertung der Outputs wäre somit nicht erforderlich. \underline{y}_4 ist der erlösmaximale Produktionspunkt.

Überprüfung: $p_1 = 20, p_2 = 10, p_3 = 30$

$$E_1 = 20 * 3 + 10 * 5 + 30 * 4 = 230 \quad E_2 = 230 \quad E_3 = 220 \quad E_4 = 260$$

→ \underline{y}_4 ist erlösmaximal!

3) Bewertung der Inputs und Outputs

Es werden die Inputs r_m mit den Faktorpreisen q_m und die Outputs x_n mit den Stückerlösen p_n bewertet. Die so entstehenden Gesamtkosten K werden den Gesamterlösen E gegenüber gestellt:

$$G = E - K \quad G = \sum_{n=1}^N p_n * x_n - \sum_{m=1}^M q_m * r_m$$

Ziel:

Ermittlung derjenigen Input- und Output mengen, die den Gewinn maximieren.

Beispiel:

$$\underline{y}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ +3 \\ +4 \\ +4 \\ +6 \end{pmatrix}, \quad \underline{y}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ +3 \\ +4 \\ +3 \\ +7 \end{pmatrix}, \quad \underline{y}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ +3 \\ +5 \\ +5 \\ +6 \end{pmatrix} \quad \underline{y}_1 \text{ wird dominiert von } \underline{y}_3$$

$$q_1 = 50, q_2 = 20, p_1 = 30, p_2 = 10, p_3 = 20, p_4 = 10$$

$$G_1 = 30 * 3 + 10 * 5 + 20 * 4 + 10 * 6 - 50 * 2 - 20 * 4 = 280 - 180 = 100, G_2 = 10, G_3 = 140$$

→ \underline{y}_3 ist gewinnmaximal

Angebot:

Gegeben sind:

$$\underline{y}_1 = \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ +3 \\ +4 \end{pmatrix}, \quad \underline{y}_2 = \begin{pmatrix} -20 \\ -10 \\ +4 \\ +3 \end{pmatrix} \quad q_1 = 5, q_2 = 8, p_1 = 30, p_2 = 50$$

a) Welcher Produktionspunkt ist zu empfehlen?

b) Für Faktorart $m=1$ ist mit einer Verteuerung zu rechnen. Um wie viel % darf q_1 maximal steigen ohne dass sich die Lösung von a) ändert?

zu a) $G_1 = 80, G_2 = 90$

zu b) 20 %

4. Produktionsplanung auf der Grundlage von Leontief-Technologien

4.1 Lineare Beziehung zwischen Inputs und Outputs

Alle diejenigen Produktionspunkte, bei denen eine Ver- λ -fachung der Einsatzmengen zu einer Ver- λ -fachung der Ausbringungsmengen führt, gehören zu einem linearen Prozess.

Formal:

$$Y = \{ \underline{y} \mid \underline{y} = \lambda * \underline{y}^0; \lambda \geq 0 \}$$

Der Prozess Y ist eine Menge von Produktionspunkten \underline{y} , für die gilt: \underline{y} ergibt sich als Produkt aus $\lambda \geq 0$ und einem „Basisproduktionspunkt“ \underline{y}^0 .

Beispiel:

$$Y = \left\{ \underline{y} \mid \underline{y} = \lambda * \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ +4 \\ +2 \end{pmatrix}; \lambda \geq 0 \right\}$$

Zu diesem linearen Prozess gehören beispielsweise:

$$\underline{y}_1 = \begin{pmatrix} -20 \\ -40 \\ +8 \\ +4 \end{pmatrix}, \quad \underline{y}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ +2 \\ +1 \end{pmatrix}, \quad \underline{y}_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ +2,4 \\ +1,2 \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_1=2$ mit $\lambda_2=0,5$ mit $\lambda_3=0,6$

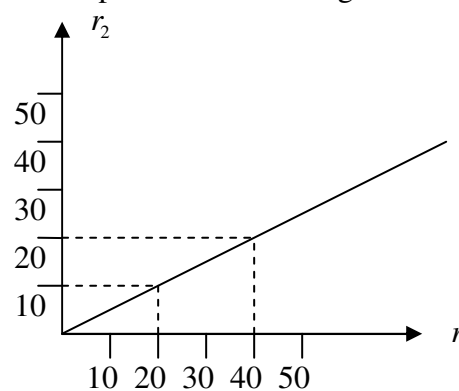
Produktionspunkte linearer Prozesse, die technisch realisierbar sind, gehören zur linearen Technologie(menge). Ist mindestens eine Inputart mengenmäßig beschränkt, dann liegt eine Leontief-Technologie vor.

Graphisch lässt sich ein linearer Prozess genau dann darstellen, wenn nur 2 Inputarten in den Produktionsprozess eingehen und eine Outputart erstellt wird.

Beispiel:

$$Y = \left\{ \underline{y} \mid \underline{y} = \lambda * \begin{pmatrix} -20 \\ -10 \\ +5 \end{pmatrix}; \lambda \geq 0 \right\}$$

Graphische Darstellung:



4.2 Mengenorientierte Planung

(a) Lineare Technologien (d. h. Vernachlässigung von Faktormengenbeschränkungen)

Hierbei wird zwischen „reinen“ und „gemischten“ linearen Prozessen unterschieden

Formal:

Reiner Prozess

$$Y = \left\{ \underline{y} \mid \underline{y} = \lambda * \underline{y}^0; \lambda \geq 0 \right\}$$

Gemischter Prozess:

$$Y = \left\{ \underline{y} \mid \underline{y} = \lambda * \underline{y}^g; \lambda \geq 0 \right\}$$

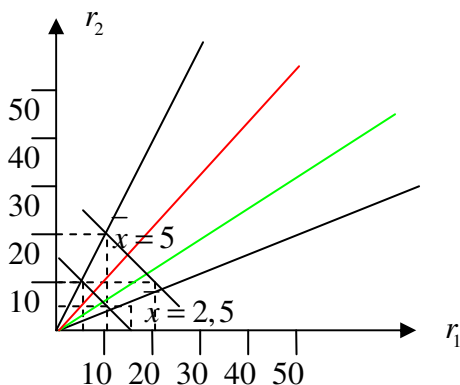
$$\underline{y}^g = c_i * \underline{y}_i^0 + c_j * \underline{y}_j^0$$

Basisproduktionspunkte der Prozesse i und j

c_i (bzw c_j) gibt den Anteil a , zu dem Prozess i (bzw j) an der Herstellung des Outputs beteiligt ist.

Beispiel: $i=1$ und $j=2$

$$Y_1 = \left\{ \underline{y} \mid \underline{y} = \lambda * \underline{y}_1^0 = \lambda * \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ +5 \end{pmatrix} \right\}, \quad Y_2 = \left\{ \underline{y} \mid \underline{y} = \lambda * \underline{y}_2^0 = \lambda * \begin{pmatrix} -20 \\ -10 \\ +5 \end{pmatrix} \right\}$$



$$Y_1^g = \left\{ \underline{y} \mid \underline{y} = \lambda * \underline{y}_1^g; \lambda \geq 0 \right\} \text{ mit } c_1 = 0,20 \text{ und } c_2 = 0,80$$

$$\Rightarrow Y_1^g = 0,2 * \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ +5 \end{pmatrix} + 0,8 * \begin{pmatrix} -20 \\ -10 \\ +5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -12 \\ +5 \end{pmatrix}$$

$$Y_2^g = \left\{ \underline{y} \mid \underline{y} = \lambda * \underline{y}_2^g; \lambda \geq 0 \right\} \text{ mit } c_1 = 0,70 \text{ und } c_2 = 0,30$$

$$\Rightarrow Y_2^g = 0,7 * \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ +5 \end{pmatrix} + 0,3 * \begin{pmatrix} -20 \\ -10 \\ +5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ -17 \\ +5 \end{pmatrix}$$

Die Verbindungslinie aller Faktormengenkombinationen, die zu einem identischen Output führen (hier: $\bar{x} = 5$), nennt man Produktisoquante.

(b) Leontief-Technologien (d. h. Berücksichtigung von Faktormengenbeschränkungen)

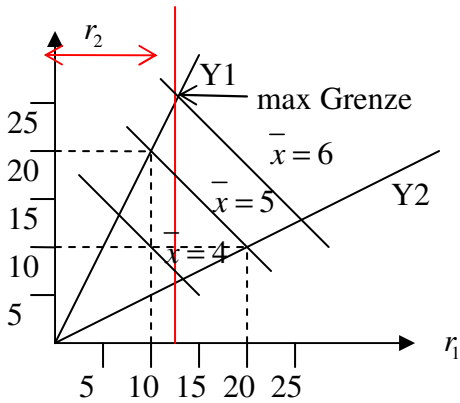
Problemstellung:

Welche Produktionsmenge ist unter Einsatz welcher Faktormengenkombination maximal herstellbar, wenn mindestens einer der beiden Faktorverbräuche durch einen gegebenen Faktorvorrat beschränkt ist?

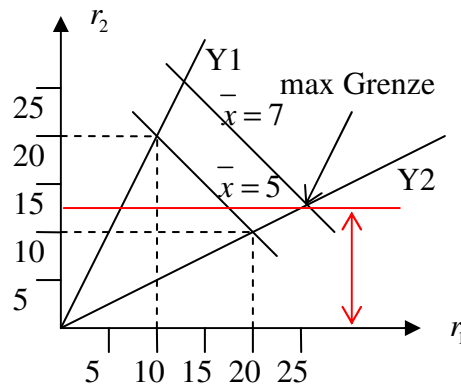
Beispiel:

$$Y_1 = \left\{ \underline{y} | \underline{y} = \lambda * \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ +5 \end{pmatrix}; \lambda \geq 0 \right\}, \quad Y_2 = \left\{ \underline{y} | \underline{y} = \lambda * \begin{pmatrix} -20 \\ -10 \\ +5 \end{pmatrix}; \lambda \geq 0 \right\}$$

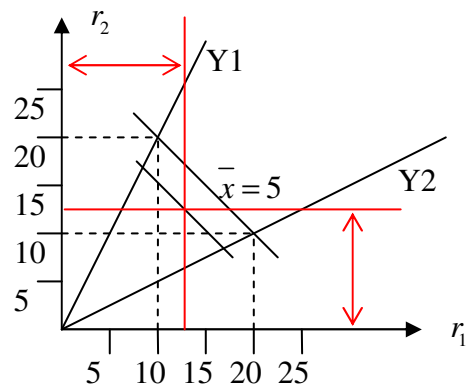
- (a) $\bar{r}_1 = 12$ (b) $\bar{r}_2 = 14$ (c) $\bar{r}_1 = 14$ und $\bar{r}_2 = 10$



Lösung $x_{\max} = 6$



Lösung $x_{\max} = 7$



Lösung $x_{\max} = 4$

4.3. Kostenorientierte Planung

4.3.1 Vernachlässigung von Faktormengenbeschränkungen (Lineare Technologien)

(a) Kostenminimierung bei gegebenem Output

Problemstellung:

Welcher von unterschiedlichen möglichen linearen Prozessen ist einzusetzen, wenn ein jeweils vorgegebener Output kostenminimal herzustellen ist?

Beispiel:

$$Y_1 = \left\{ \underline{y} | \underline{y} = \lambda * \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ +5 \end{pmatrix}; \lambda \geq 0 \right\}, \quad Y_2 = \left\{ \underline{y} | \underline{y} = \lambda * \begin{pmatrix} -12 \\ -6 \\ +3 \end{pmatrix}; \lambda \geq 0 \right\}$$

Gegeben sind die Faktorpreise:

$$q_1 = 1,00 \frac{[GE]}{[FE]}, \quad q_2 = 0,50 \frac{[GE]}{[FE]}$$

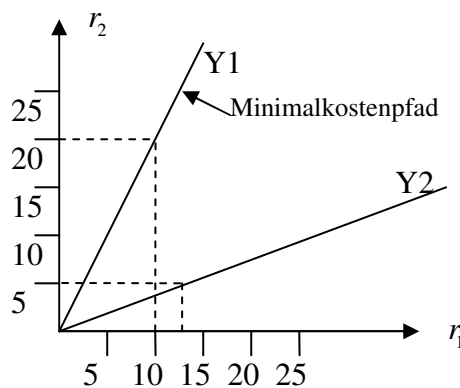
Gesucht ist derjenige lineare Prozess, der die Stückkosten minimiert.

$$k_1 = 1,00 \frac{[GE]}{[FE]} * 2(10/5) \frac{[FE]}{[PE]} + 0,50 \frac{[GE]}{[FE]} * 4(20/5) \frac{[FE]}{[PE]} = 4 \frac{[GE]}{[PE]}$$

$$k_2 = 1,00 * 4(12/3) + 0,50 * 2(6/3) = 5$$

Wenn ein bestimmter Output, z. B. $\bar{x}=3$, hergestellt werden soll, so gelingt dies kostenminimal, wenn Prozess Y_1 eingesetzt wird und zwar mit $r_1^* = 6(0,6*10)$, $r_2^* = 12(0,6*20)$

Diese Kombination von Faktoreinsatzmengen, um einen Output $\bar{x}=3$ kostenminimal zu erstellen, heißt Minimalkostenkombination. Die Verbindungslinie von zu unterschiedlichen Outputs gehörenden Minimalkostenkombinationen heißt Minimalkostenpfad.



(b) Outputmaximierung bei gegebenem Kostenbudget

Problemstellung:

Welcher Output ist mit welcher Faktormengenkombination durch welchen linearen Prozess maximal herstellbar, wenn das Kostenbudget vorgegeben ist?

Beispiel:

$$Y_1 = \left\{ \underline{y} \mid \underline{y} = \lambda * \begin{pmatrix} -4 \\ -12 \\ +4 \end{pmatrix}; \lambda \geq 0 \right\}, \quad Y_2 = \left\{ \underline{y} \mid \underline{y} = \lambda * \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ +4 \end{pmatrix}; \lambda \geq 0 \right\}, \quad Y_3 = \left\{ \underline{y} \mid \underline{y} = \lambda * \begin{pmatrix} -16 \\ -4 \\ +4 \end{pmatrix}; \lambda \geq 0 \right\}$$

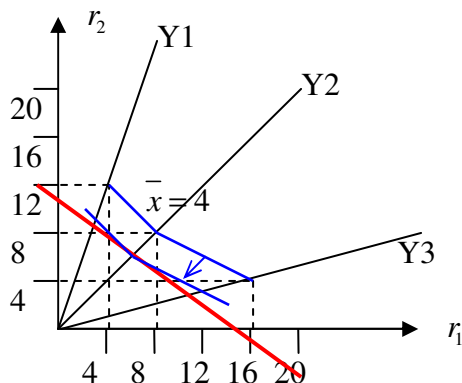
Gegeben sind die Faktorpreise:

$$q_1 = 20 \frac{[€]}{[FE]}, \quad q_2 = 30 \frac{[€]}{[FE]}$$

Stückkosten der drei Prozesse:

$$k_1 = 20 * 1 + 30 * 3 = 110, \quad k_2 = 100, \quad k_3 = 110$$

Graphische Lösung:



Die Gesamtkosten betragen:

$$K = q_1 * r_1 + q_2 * r_2 \quad \text{Hier: } \bar{K} = 300, \quad q_1 = 20, \quad q_2 = 30$$

$$300 = 20 * r_1 + 30 * r_2 \quad (\text{Kostenisoquante}) \Leftrightarrow r_2 = -2/3 * r_1 + 10$$

4.3.2 Berücksichtigung von Faktormengenbeschränkungen („Leontief-Technologie“)

Problemstellung:

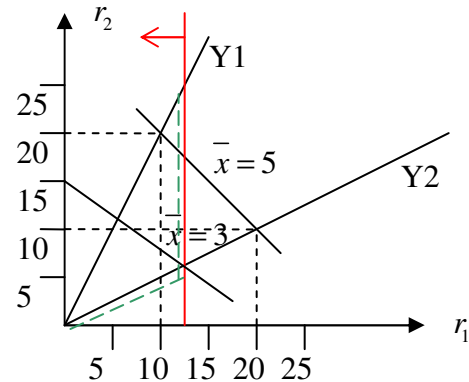
Welcher Output ist mit welcher Faktormengenkombination durch welchen linearen Prozess kostenminimal herzustellen, wenn der Vorrat mindestens einer Faktorart beschränkt ist?

$$Y_1 = \left\{ \underline{y} \mid \underline{y} = \lambda * \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ +5 \end{pmatrix}; \lambda \geq 0 \right\}, \quad Y_2 = \left\{ \underline{y} \mid \underline{y} = \lambda * \begin{pmatrix} -20 \\ -10 \\ +5 \end{pmatrix}; \lambda \geq 0 \right\}$$

$$1) \bar{r}_1 = 12[FE]/[PZE] \quad q_1 = 0,50[GE]/[FE], \quad q_2 = 1,00[GE]/[FE]$$

Stückkostenvergleich:

$$k_1 = 0,50 * 2 + 1,00 * 4 = 5, \quad k_2 = 0,50 * 4 + 1,00 * 2 = 4$$



$$2) \bar{r}_1 = 16[FE]/[PZE] \quad q_1 = 1,00[GE]/[FE], \quad q_2 = 0,50[GE]/[FE]$$

Ermittlung der Stückkosten:

$$k_1 = 4, \quad k_2 = 5 \} \rightarrow Y_1 \text{ ist kostenminimal}$$

5. Produktionsplanung auf der Grundlage von Gutenberg-Technologien

Unter einer Gutenberg-Technologie(menge) versteht man die Menge aller technisch realisierbaren Produktionspunkte, für die gilt, dass sich der Verbrauch einer Faktorart m (symbolisiert durch r_m)

5.1 Gutenberg Verbrauchsfunktionen

Der Verbrauch a_m ist keine fest vorgegebene Größe, sondern eine abhängige Variable und zwar hängt a_m von der Geschwindigkeit („Intensität“) ab, in der die Maschine zur Herstellung des Outputs gefahren wird.

$$a_m = a_m(d) \text{ Intensität (=Produktionsgeschwindigkeit in [PE]/[ZE])}$$

5.2 Mengenorientierte Planung

In der Regel dürfen pro Output mehrer Inputarten erforderlich sein; für jede dieser Inputarten kann dann aber eine andere Intensität optimal (im Sinne von verbraucherminimal) sein.

Problem:

Welche von unterschiedlichen möglichen Produktionsgeschwindigkeiten kann man als „effiziente Produktionen“ einstufen?

Beispiel:

Ein Output erfordere $M=3$ Inputs:

$$a_1(d) = \frac{1}{10}d^2 - 4d + 45 \quad a_2(d) = \frac{1,6}{d} \quad a_3(d) = 10$$

Für d gilt: $d \in [10; 30]$

Zu bestimmen ist die Menge der effizienten Produktionen.

Gesucht wird die verbrauchsminimale Intensität für jede der drei GVF:

(1) $m=1$:

$$a_1'(d) = \frac{2}{10}d - 4 \quad \frac{2}{10} * d_1^* - 4 = 0 \Leftrightarrow d_1^* = 20$$

$$a_1''(d) = \frac{2}{10} > 0 \rightarrow \text{Minimum!}$$

Da $20 \in [10; 30]$, ist $d_1^* = 20$ realisierbar!

(2) $m=2$:

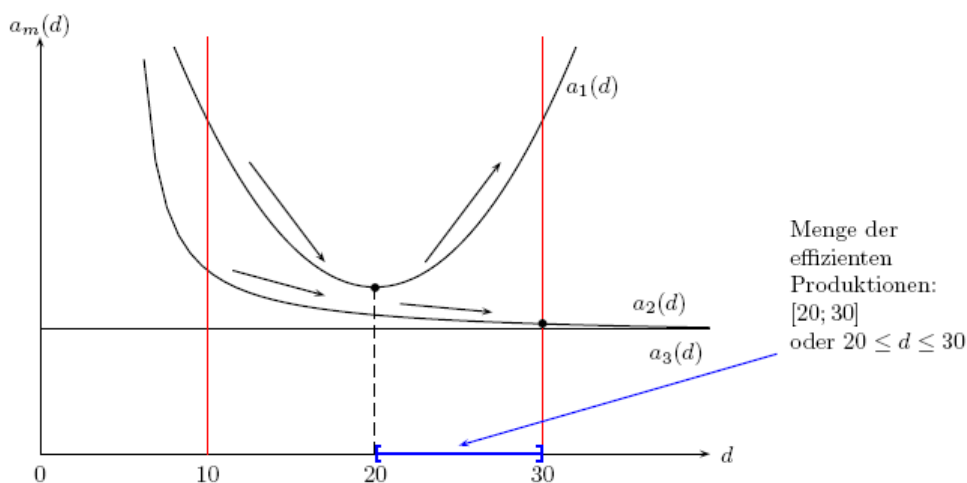
$$a_2'(d) = -\frac{1,6}{d^2} < 0 \text{ Bei } a_2(d) \text{ handelt es sich um eine streng monoton fallende Funktion!}$$

- Das Minimum liegt am rechten Rand des Definitinosbereichs!
- $d_2^* = 30$

(3) $m=3$:

$$a_3'(d) = 0$$

- Der Verbrauch von $m=3$ ist für alle $d \in [10; 30]$ gleich!
- d_3^* ist beliebig!



Zusatzaufgabe:

Die Intensität $\bar{d} = 20$ sei fest vorgegeben. Die Vorräte der drei Faktorarten seien begrenzt:

$$\bar{r}_1 = 5000, \bar{r}_2 = 100, \bar{r}_3 = 12.000$$

- Welcher Output x_{\max} ist höchstens herstellbar?
- Welche Inputs sind für x_{\max} erforderlich?

zu a)

$$a_1(\bar{d} = 20) = \frac{1}{10} * 20^2 - 4 * 20 + 45 = 5 \quad a_2(\bar{d} = 20) = \frac{1,6}{20} = 0,08 \quad a_3(\bar{d} = 20) = 10$$

Die maximal herstellbare Menge ergibt sich wie folgt:

$$\frac{\bar{r}_1}{a_1(\bar{d})} = \frac{5000[FE]/[PZE]}{5[FE]/[PE]} = 1000 \frac{[PE]}{[PZE]}, \quad \frac{\bar{r}_2}{a_2(\bar{d})} = \frac{100}{0,08} = 1250, \quad \frac{\bar{r}_3}{a_3(\bar{d})} = \frac{12000}{10} = 1200$$

$$\Rightarrow x_{\max} = \min \left\{ \frac{\bar{r}_m}{a_m(\bar{d})} \right\} = \min \{1000; 1250; 1200\} = 1000 \quad \text{Produktfunktion}$$

zu (4)

$$r_1(x_{\max}) = a_1(\bar{d}) * x_{\max} = 5 \frac{[FE]}{[PE]} * 1000 \frac{[PE]}{[PZE]} = 5000 \frac{[FE]}{[PZE]} \stackrel{!}{=} \bar{r}_1$$

$$r_2(x_{\max}) = a_2(\bar{d}) * x_{\max} = 0,08 * 1000 = 80 < \bar{r}_2 = 100$$

$$r_3(x_{\max}) = a_3(\bar{d}) * x_{\max} = 10 * 1000 = 10000 < \bar{r}_3 = 12000$$

Die allgemeine Formulierung:

$$r_n(x) = a_n(\bar{d}) * x \quad \text{heißt Faktoreinsatzfunktion.}$$

5.3 Kostenorientierte Planung

In der Regel wird die Mengenorientierte Planung zu dem Ergebnis führen, dass mehr als nur eine Produktionsgeschwindigkeit effizient ist.

Problem:

Welche von unterschiedlich möglichen Produktionsgeschwindigkeiten gewährleistet, dass ein gegebener Output zu minimalen Kosten erzeugt wird?

Beispiel: $M=2$

$$m=1: a_1(d) = \frac{1}{4} * d^2 - 2d + 20 \qquad m=2: a_2(d) = \frac{1}{6} * d^2 - 4d + 80$$

(a) Bestimmen Sie die verbrauchsminimalen Intensitäten für $m=1$ und $m=2$.

(b) Bestimmen Sie die kostenminimale Intensität, wenn gilt:

$$q_1 = 12[GE]/[FE] \quad \text{und} \quad q_2 = 6[GE]/[FE]$$

zu (a)

$$m=1: a_1'(d) = \frac{1}{2}d - 2 \qquad \frac{1}{2} * d_1^* - 2 \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow d_1^* = 4 \qquad a_1''(d) = \frac{1}{2} \rightarrow \text{Minimum!}$$

$$m=2: a_2'(d) = \frac{1}{3}d - 4 \qquad \frac{1}{3} * d_2^* - 4 \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow d_2^* = 12 \qquad a_2''(d) = \frac{1}{3} > 0 \rightarrow \text{Minimum!}$$

zu (b)

Die Stückkostenfunktion lautet:

$$k(d) = q_1 * a_1(d) + q_2 * a_2(d) = 12 * \left(\frac{1}{4}d^2 - 2d + 20 \right) + 6 * \left(\frac{1}{6}d^2 - 4d + 80 \right) = 4d^2 - 48d + 720$$

Gesucht ist das Minimum dieser Stückkostenfunktion!

$$k'(d) = 8d - 48 \Leftrightarrow d^* = 6, \quad k''(d) = 8 > 0 \rightarrow \text{Minimum!}$$

(Die minimalen Stückkosten betragen $k(d^* = 6) = 4 * 36 - 48 * 6 + 720 = 576$)

(c) Bei welcher Veränderung der Faktorpreises q_1 ergibt sich das Minimum der Stückkosten für

$$d^* = 8? \quad \Delta q_1 = -8$$

6. Beschaffung von Verbrauchsfaktoren

Zu den Verbrauchsfaktoren gehören:

- Werkstoffe (Roh-, Hilfs- und Betriebsstoffe)
- Einzelteile
- Werkzeuge

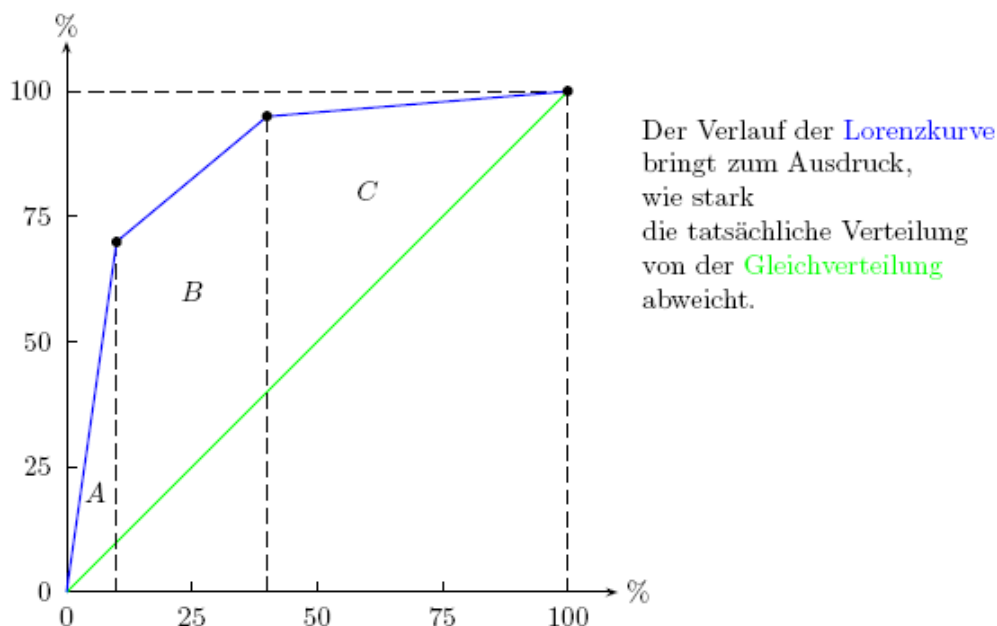
Im Rahmen von 6 werden hier nur die Werkstoffe (=Materialien) behandelt!

6.1 Klassifizierung von Materialien

Empirische Untersuchungen haben ergeben:

- (a) 5-15% der Materialarten verursachen 60-80% der Materialkosten
- (b) 20-40% der Materialarten verursachen 20-30% der Materialkosten
- (c) 50.75% der Materialarten verursachen 5-10% der Materialkosten

Diese Ungleichverteilung von Materialkosten auf Materialarten lässt sich wie folgt graphisch veranschaulichen:



6.2 Planung des Materialbedarfs

6.2.1 Programmorientierte Verfahren

(d. h. Bedarf an Materialien leitet man aus dem Produktionsprogramm ab)

Instrument: Gozintograph

Es wird zwischen drei Arten von Bedarfen unterschieden:

- (a) Primärbedarf
Bedarf an End- und Zwischenprodukten für den Absatzmarkt (gegeben!)
- (b) Sekundärbedarf
Bedarf an einzusetzenden Zwischenprodukten und Materialien (gesucht!)
- (c) Tertiärbedarf
Bedarf an Betriebsstoffen (vernachlässigt!)

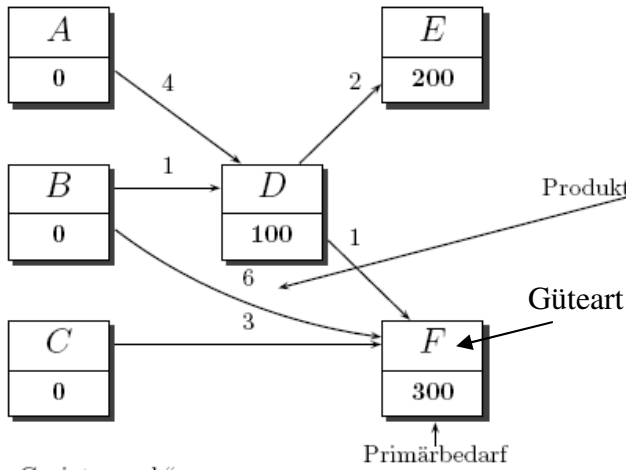
Beispiel:

Gegeben: 3 Materialien A, B, C, 1 Zwischenprodukt D und 2 Endprodukte E, F

Gesucht: Ermitteln Sie die Gesamtbedarfe!

Gesamtbedarf = Primärbedarf + Sekundärbedarf

Materialien Zwischenprod. Endprod.



$$\begin{array}{rcl}
 x_A & = & 0 \\
 x_B & = & 0 \\
 x_C & = & 0 \\
 x_D & = & 100 \\
 x_E & = & 200 \\
 x_F & = & 300
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 + 4 \cdot x_D \\
 + 1 \cdot x_D + 6 \cdot x_F \\
 + 3 \cdot x_F \\
 + 2 \cdot x_E + 1 \cdot x_F \\
 + 0 \\
 + 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 x_F = 300, x_E = 200, \\
 x_D = 100 + 2 \cdot 200 + 1 \cdot 300 = 800 \\
 x_C = 900, x_B = 2600, x_A = 3200
 \end{array}$$

„Gozintograph“

6.2.2. Verbrauchorientierte Verfahren (d. h. die Prognose des zukünftigen Materialverbrauchs orientiert sich an der Vergangenheitswerten des Verbrauchs)

(a) Methode der einfachen Durchschnitte (d. h. einfache Mittelwertbildung)

Beispiel:

Bsp:

t	-4	-3	-2	-1	0	+1
r_t	10	25	15	30	20	\hat{r}_t

$$\hat{r}_t = \frac{10+25+15+30+20}{5} = 20 \text{ (geschätzter Verbrauch in } t = 1)$$

(b) Methode der gleitenden Durchschnitte

(d. h. es wird der Mittelwert der letzten \bar{z} Perioden gebildet.)

Beispiel:

t	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
r_t	10	25	15	30	20	20		
		25	15	30	20	30	24	
			15	30	20	30	35	26

$$\alpha = 0,50, \hat{r}_0 = 28$$

$$\hat{r}_1 = \alpha \cdot r_0 + (1 - \alpha) \cdot \hat{r}_0 = 0,50 \cdot 20 + 0,50 \cdot 28 = 24$$

$$\hat{r}_2 = 27$$

$$\hat{r}_3 = 31$$

(c) Methode der exponentiellen Glättung

$$\hat{r}_t = \alpha \cdot r_{t-1} + (1 - \alpha) \cdot \hat{r}_{t-1} \text{ Glättungsfaktor mit } 0 \leq \alpha \leq 1$$

6.3 Planung der Materialbeschaffung

Problemstellung:

Wie lautet die pro Bestellvorgang zu beschaffende Menge, wenn die mit der Beschaffung verbundenen Gesamtkosten minimiert werden sollen?

Min K(r)

r:=pro Bestellvorgang zu beschaffende Menge in [FE]/[Bestellung]

=q*R=gesamte Materialkosten in [GE]/[PZE]

q:=Faktorpreis in [GE]/[FE]

R:=Gesambedarf der Materialart in [FE]/[PZE]

+ $k_B \cdot R / r$ = gesamte Bestellkosten in [GE]/[PZE]

k:=Bestellfixe Kosten in [GE]/[Bestellung]

R/r:=Anzahl an Bestellungen in [Bestellungen]/[PZE]

+ $k_L \cdot \bar{\Delta} LB$ = gesamte Lagerkosten in [GE]/[PZE]

k:=Lagerkostensatz in [GE]/([FE]*[PZE])

LB:=durchschnittlicher Lagerbestand in [FE]